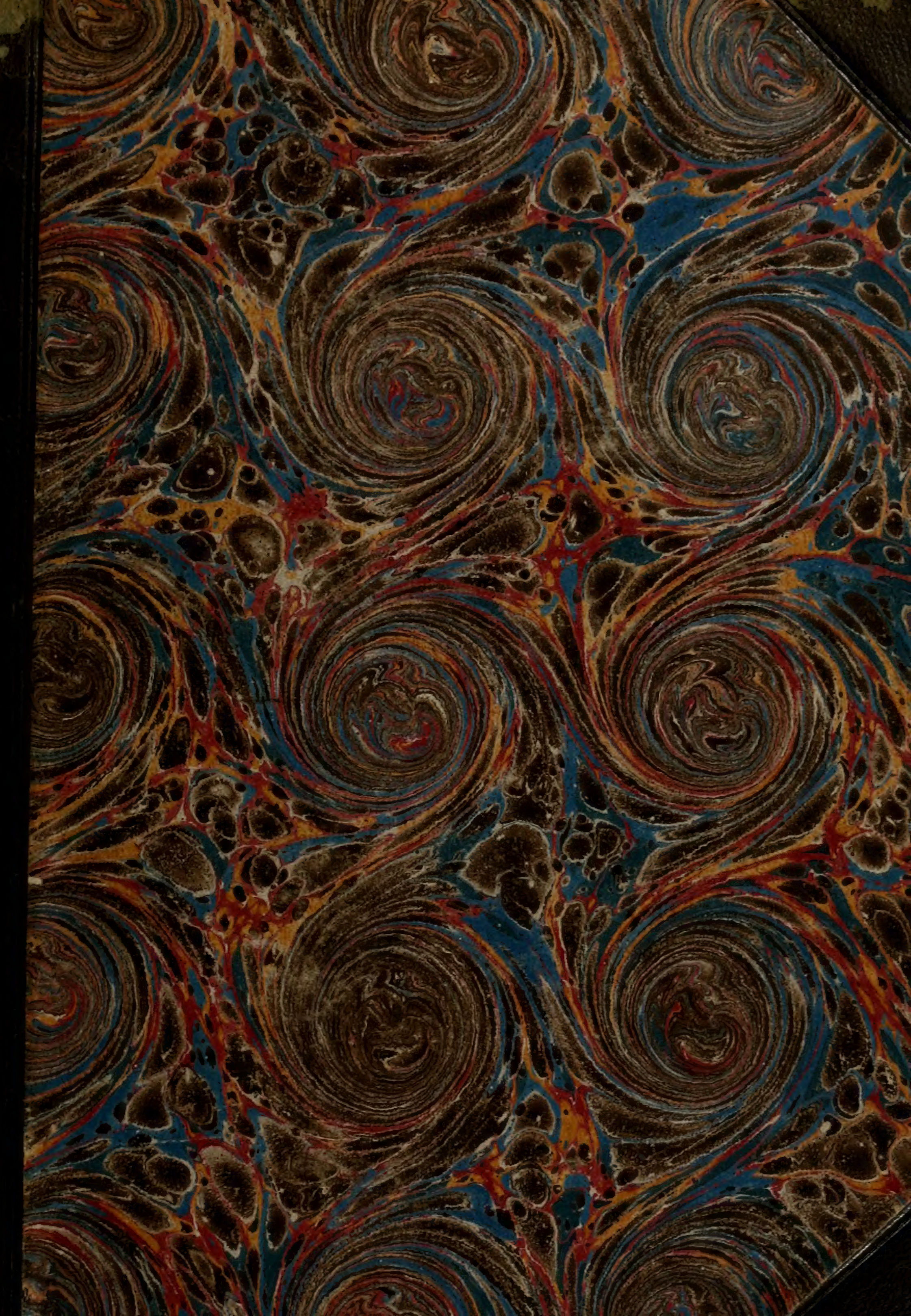
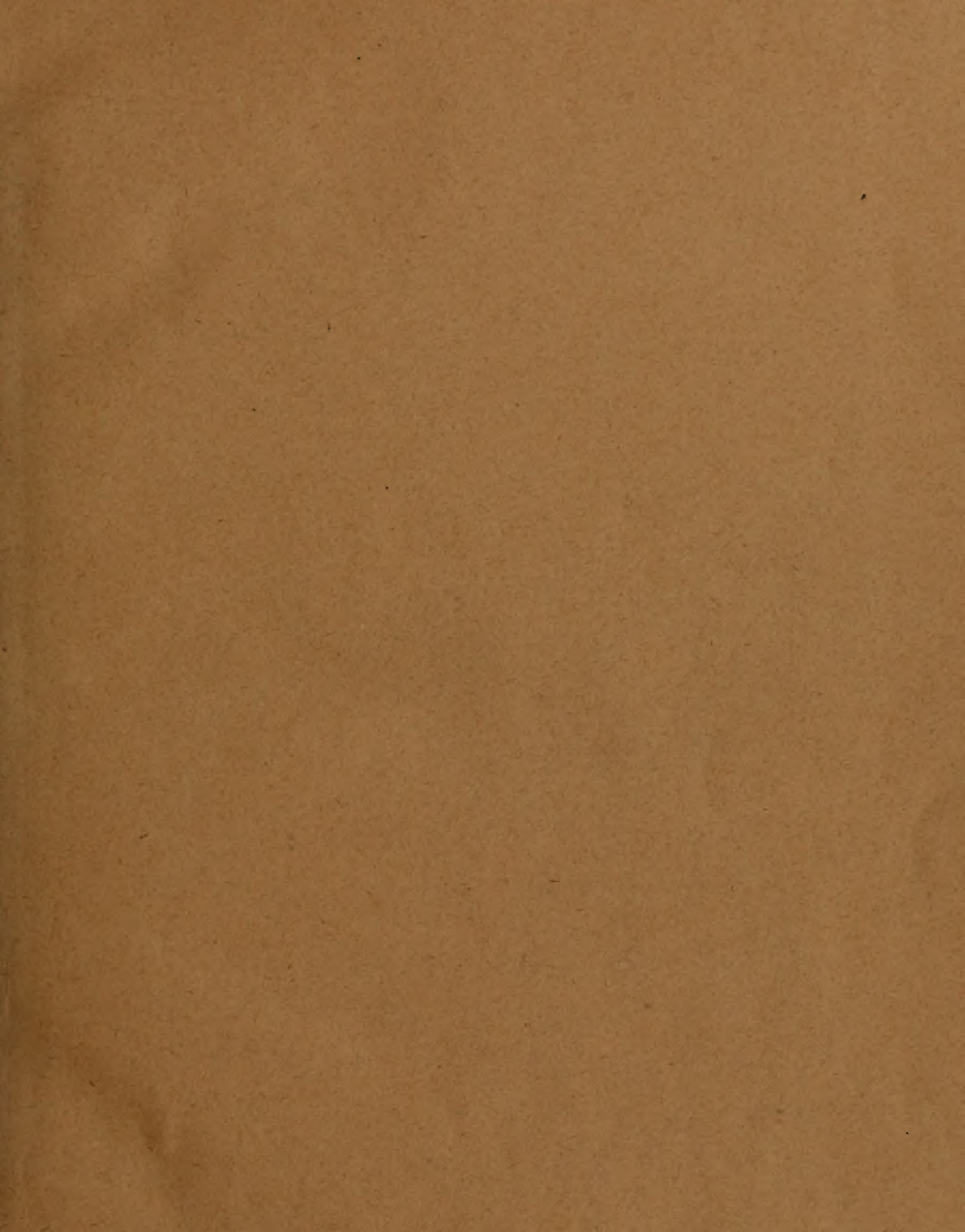
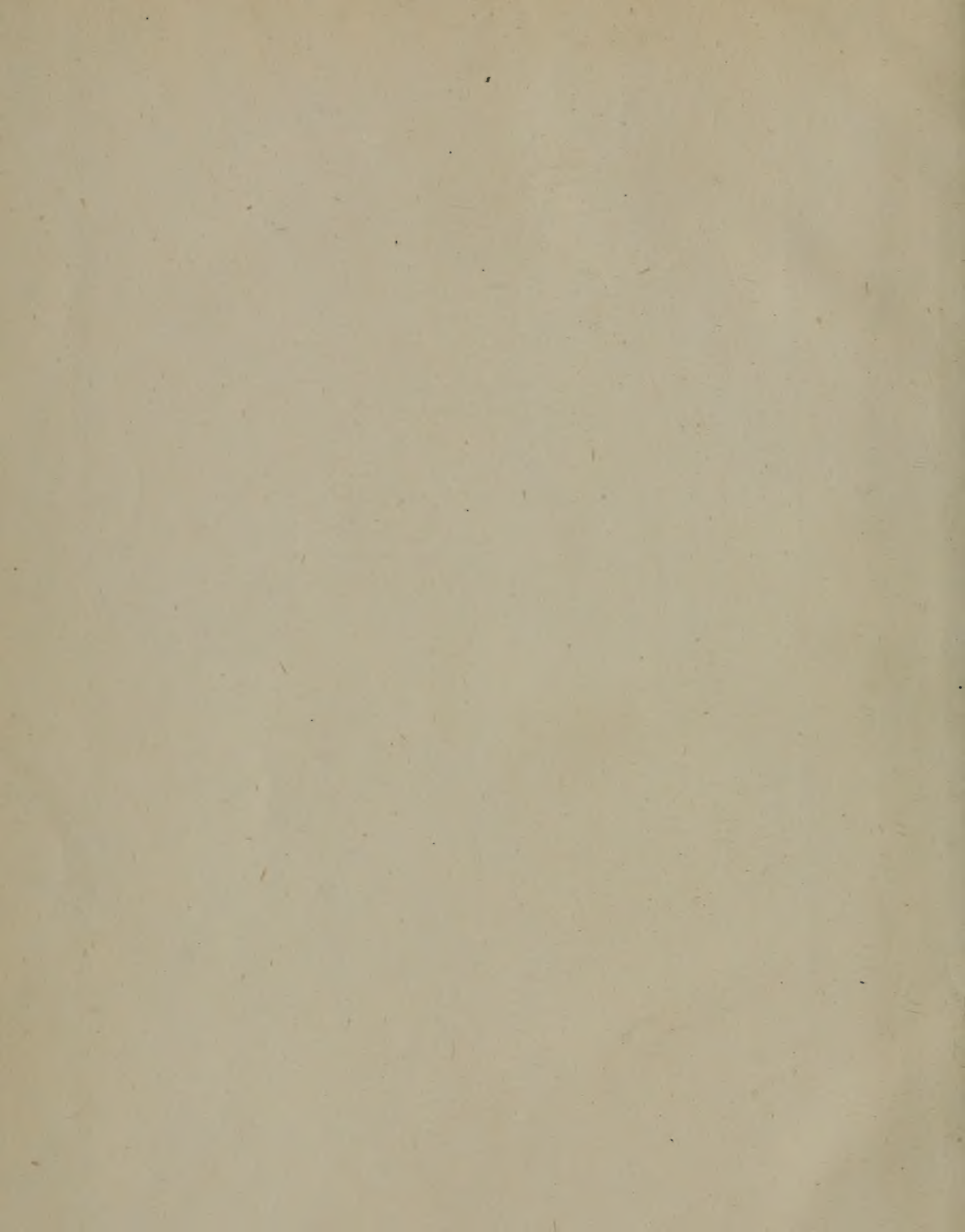
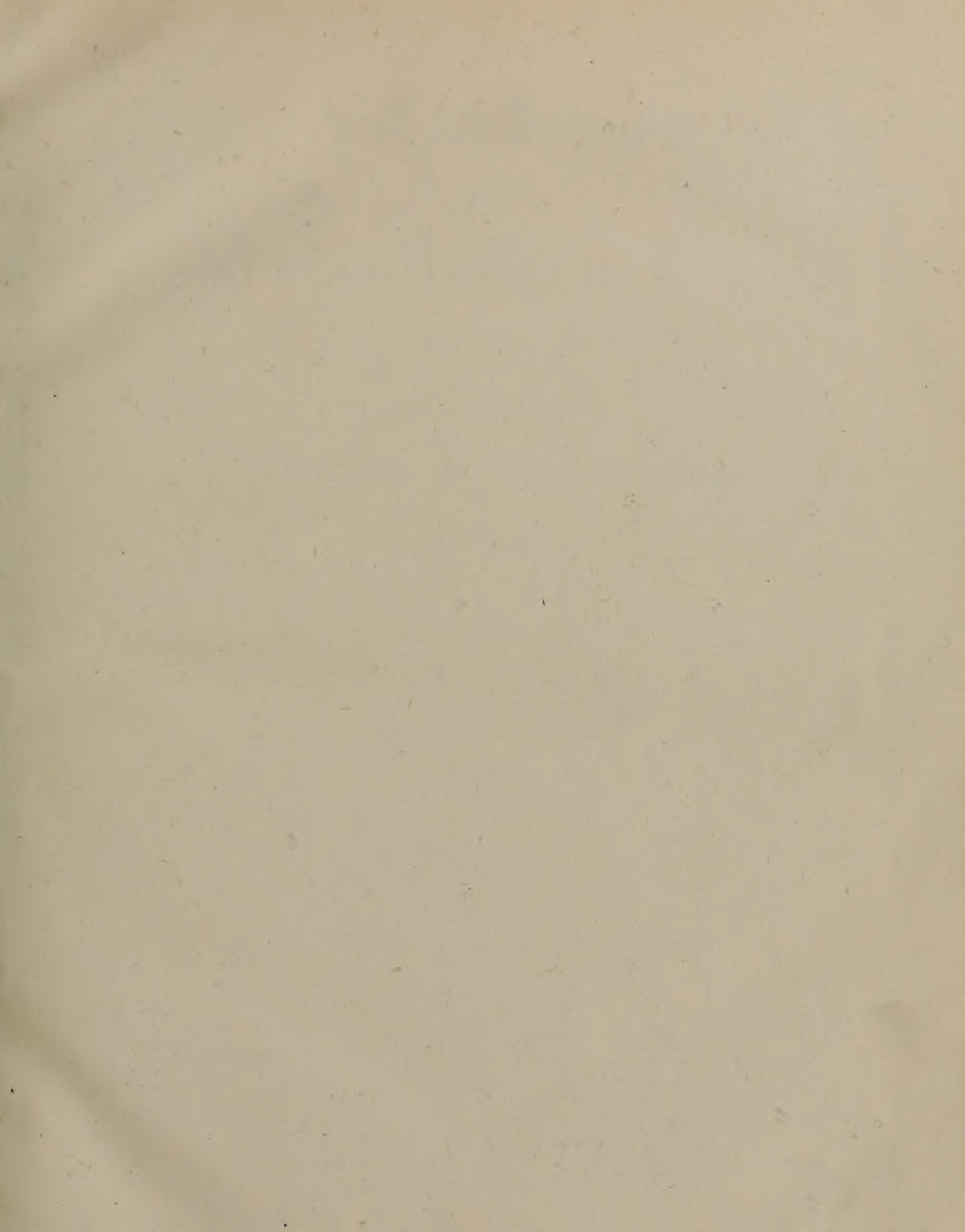










Abhandlungen

der

physikalischen Klasse

der

Königlichen

Akademie der Wissenschaften

zu Berlin.

Aus dem Jahre

1824.



Berlin.

Gedruckt in der Druckerei der Königlichen Akademie
der Wissenschaften.

1826.

In Commission bei F. Dümmler.

Inhalt.

Ueber

die chemische Verbindung der Körper.

Von

Hrn. KARSTEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 15. Januar 1824.]

Zwei Bedingungen sind es, die man bald als die nothwendigen erkannte, wenn eine chemische Vereinigung der Körper erfolgen soll. Die eine, dafs zwischen ihnen eine unmittelbare Berührung statt finde; die andere, dafs die sich berührenden Körper, nach ihrer verschiedenen Beschaffenheit, entweder mit Wasser in Verbindung gebracht, oder dafs sie einer höheren Temperatur ausgesetzt werden.

Den Grund der Veränderungen der Eigenschaften welche die Körper bei dieser Verbindung erfahren, ist man schon längst, indefs bis jetzt vergeblich, zu erforschen bemüht gewesen. Dies kann auch nicht befremden, weil die Eigenschaften eines Körpers nur durch die Wirkung auf andere Körper erkannt werden können. Die Körper an sich sind uns vollkommen unbekannt, nur ihre Eigenschaften lernen wir in dem Augenblick der Wirkung d. h. in dem Augenblick kennen, wo sie eine Veränderung erleiden und hervorbringen. Was aber eine Veränderung hervorbringt, ist eine Kraft, und die Wirkung der Kraft mufs entweder eine äufsere oder eine innere seyn. Aeufsere Veränderungen beziehen sich auf den Raum und haben auf die Beschaffenheit des Körpers keinen Einflufs. Innere Veränderungen aber sind von räumlichen Verhältnissen unabhängig. Wenn man also die Veränderungen untersucht, welche durch die Einwirkung der Körper auf einander hervorgebracht werden, so betrachtet man nicht die uns ganz unbekannten Materien, sondern ihre Kräfte in dem Augenblick ihrer

Wirksamkeit. Die Körper äufsern folglich die Kräfte, welche eine Vereinigung und Trennung hervorbringen, nur so lange, als die chemische Einwirkung fortdauert. Sobald diese beendigt ist, befindet sich der neu gebildete Körper, den wir an sich eben so wenig kennen, als die Körper aus denen er entstanden ist, in Ruhe.

Die Umstände unter welchen die Körper ihre Kräfte äufsern, sind aber sehr verschieden. Versucht man es, diesen Umständen weiter nachzuforschen, so ergiebt sich, dafs Temperatur, Druck, Flüssigkeit u. s. f. nur die nächsten Ursachen seyn können, aus welchen die Kräfte der Körper ruhend oder thätig erscheinen, dafs aber der wahre Grund in den Körpern selbst und in der Veränderung ihres Kohärenzzustandes gesucht werden mufs, und dafs der entstehenden Verbindung eigenthümliche Kräfte zukommen, welche durch den jedesmaligen Kohärenzzustand der Mischung, in dem Augenblick ihrer Bildung, bestimmt werden.

Ganz vorzüglich hat man es sich angelegen seyn lassen, sich eine Vorstellung von der Art und Weise zu verschaffen, wie nach vollbrachter chemischen Einwirkung der Körper *a* und *b*, diese in dem neu entstandenen Körper *c* vorhanden gedacht werden müssen. Wir wissen mit Gewifsheit dafs *c* aus *a* und *b* entstanden ist, weil das Gewicht von *c* der Summe der Gewichte von *a* und *b* gleich ist, ja wir können sogar, unter günstigen Umständen, *a* sowohl als *b*, aus *c* ohne Gewichtsverlust wieder darstellen; aber weiter reicht unsere Erfahrung nicht; wir können nicht mit eben der Gewifsheit behaupten, dafs *a* und *b* in *c* enthalten sind, weil in dem Augenblick der chemischen Einwirkung von *a* und *b*, zugleich eine Veränderung der Eigenschaften dieser Körper statt findet. Mit Gewifsheit kennen wir also nur die Erscheinung, und da uns das Gesetz unbekannt ist, nach welchem sich der Erfolg der Erscheinung richtet, so war es Bedürfnifs, diesem Mangel durch Voraussetzungen abzuhelfen, welche den Erfolg der Erscheinung erklären.

In der Hauptsache sind zwei Hypothesen zu unterscheiden. Die eine nimmt die Theilbarkeit der Materie ins Unendliche, und bei der chemischen Einwirkung der Körper auf einander, eine Durchdringung der Materie ins Unendliche an, so dafs jeder, auch unendlich klein gedachte Raum den *c* einnimmt, von *a* und *b* zugleich erfüllt wird.

Die Quantität der Materie in einem gegebenen Raum nennt diese Hypothese die **Masse**, welche sich also nur durch Maafs oder Gewicht bestimmen läfst. Bei dieser Bestimmung geht sie von der einfachen Erfahrung aus, dafs eine Quantität von *a*, mit einer Quantität von *b* den Körper *c* giebt, so dafs *c* in diesen Verhältnissen aus *a* und *b* zusammen gesetzt ist und darin zerlegt werden kann, läugnet aber, dafs *a* und *b* auch als solche in dem Raum *c* enthalten sind.

Die zweite Hypothese läfst die Körper aus kleinen untheilbaren Theilchen bestehen, welche zwar eine bestimmte Form, Gröfse und Gewicht besitzen, sich aber der sinnlichen Warnehmung gänzlich entziehen, und daher weder durch mechanische Zertheilung des Körpers dargestellt, noch gemessen oder gewogen werden können.

Bei der chemischen Einwirkung der Körper verbinden sich diese Atome durch Nebeneinanderlagerung, vermöge einer eigenthümlichen Kraft, welche zwischen ungleichartigen Atomen die chemische Vereinigung, zwischen gleichartigen aber den mechanischen Zusammenhang hervorbringt. Durch die Gesetze der bestimmten Mischungsverhältnisse hat diese Hypothese an Wahrscheinlichkeit gewonnen, indem sie auf eine einfache und leicht fafsliche Weise, aus den Atomen die Zusammensetzung der Körper zu erklären, und die Gestalt derselben sogar sinnlich darzustellen vermag, weil nichts verhindert, die Form und die Gröfse der Atome dem Bedürfnifs gemäfs abzuändern. Aber diese atomistische Hypothese erfordert eben so wie jene, die dynamische, eine Kraft, und zwar eine ununterbrochen fortwirkende Kraft, um die Möglichkeit der Materie einzusehen, oder überhaupt zu erklären. Wenn sich der Dynamiker dazu der ursprünglichen Bewegungskräfte, der anziehenden und der zurückstofsenden bedienet, so würde der Atomistiker darzuthun haben, von welcher Art die Kraft ist, welche jeder mechanischen Einwirkung widersteht, die den Zusammenhang der Atome aufzuheben strebt, und durch welche die chemische Vereinigung nicht allein zu Stande gebracht, sondern auch beharrlich darin erhalten wird.

Es ist schon oft erinnert worden, dafs die unmittelbare Anwendung der Dynamik auf die chemischen Verbindungen und Trennungen der Körper, ganz falsch und den Prinzipien derselben widerstreitend sei. Die Möglichkeit der Grundkräfte läfst sich nicht beweisen; weil aber

jede Thätigkeit und Veränderung die im Raume vorgeht, nur durch Bewegung gedacht werden kann, so genügt es, den Begriff der Materie auf bewegende Kräfte zurück zu führen.

Man hat es der dynamischen Lehre zum Vorwurf gemacht, dafs sie die Krystallisation, also die Form der Körper, eben so wenig zu erklären, als den Grund anzugeben vermöge, warum sich die Körper nur in gewissen Verhältnissen mit einander verbinden. Bei diesem Vorwurf ist jedoch übersehen, dafs man den Grund einer Erscheinung zu wissen verlangt, der sich eben so wenig angeben läfst, als man überhaupt bestimmen kann, was ein Körper für sich betrachtet sei. Der Grund des die Form und die Mischungsverhältnisse Bestimmenden, ist nicht der chemische Prozefs als solcher, sondern er mufs in den Bewegungsgesetzen der Kräfte gesucht werden, welche von dem Kohärenzzustande der Körper abhängig sind. Wäre der chemische Prozefs das Bestimmende, so würde nicht einleuchten, warum manche Körper nur ein Mischungsverhältnifs beobachten, während andere Körper zwei und mehrere eingehen. Die Ursache dieses merkwürdigen Verhaltens der Körper hängt mit ihrem Wesen so genau zusammen, dafs man es nicht abgesondert davon denken kann. So lange die Ursache des Kohärenzzustandes der Körper überhaupt nicht bekannt ist, darf man nicht erwarten einen genügenden Aufschlufs über den wahren Grund der chemischen Mischungsverhältnisse zu erhalten, welche, nach allen Erfahrungen, von der Temperatur und anderen Einflüssen abhängig sind, ohne diese Einflüsse als den letzten Grund jener Erscheinungen betrachten zu dürfen. Wenn wir finden, dafs sich das Quecksilber bei der Temperatur seines Siedepunktes oxydirt, den Sauerstoff aber in einer höheren Temperatur wieder entläfst, so kann in beiden Fällen nur der Kohärenzzustand des Quecksilbers und des Sauerstoffs das Bestimmende der Erscheinung seyn. Körper die bei ihrer Verbindung mit einander, ihren Kohärenzzustand entweder nicht bedeutend, oder wenigstens in gleichbleibenden Verhältnissen verändern, zeigen wirklich sehr unbestimmte Verbindungsverhältnisse, und daher dürften die Gesetze der bestimmten Mischungsverhältnisse in sehr vielen Fällen auch nur auf einen gewissen und bestimmten Kohärenzzustand der Körper beschränkt werden müssen.

Die Beschaffenheit einer flüssigen oder starren Mischung, welche einen Bestandtheil in einem überwiegenden Verhältnifs enthält, läfst sich nach rein atomistischen Ansichten nicht erklären, und noch weniger giebt diese Lehre darüber einen Aufschlufs, wie überhaupt Verbindungen und Trennungen zwischen Körpern erfolgen können, von denen sich keiner im flüssigen Zustande befindet. Damit sich die Atomen zweier Körper zu einem neuen dritten zusammenfügen, müssen sie sich nothwendig in einem Zustande befinden, der eine leichte Verschiebbarkeit ihrer Atome zuläfst, d. h. die Körper deren Vereinigung oder Trennung bezweckt wird, müssen flüssig seyn, denn die unmittelbare Berührung allein, würde eine solche Verbindung nicht bewirken können, weil sich, auch im Zustande der feinsten mechanischen Zertheilung, nicht die Atome, sondern die aus ihnen zusammengesetzten mechanisch zerkleinerten Theilchen der Körper berühren. Die unmittelbare Berührung der Körper allein würde also nicht zureichen können, um Verbindungen und Trennungen hervorzubringen, sondern es würde dazu auch der Zustand der Flüssigkeit nothwendig erforderlich seyn. Auflösung der Körper und chemische Vereinigung sind aber ein und derselbe Prozefs, und wer das Geheimnifs der Auflösung zu enträthseln vermögte, würde zugleich das der chemischen Verbindung und Trennung enthüllt haben.

Man unterscheidet Auflösungen und Verbindungen auf dem nassen und auf dem trocknen Wege. Die ersteren erfolgen durch Hülfe des Wassers, die letzteren vermittelst des Wärmestoffs. Eine Auflösung des festen Körpers im Wärmestoff, wodurch derselbe in den tropfbar flüssigen Zustand versetzt wird, pflegt man auch das Schmelzen zu nennen. Es ist hierbei die Frage aufgeworfen worden, ob der Wärme Materialität zukomme, ob man nämlich die Verbindung der Körper mit Wärme als eine chemische Vereinigung derselben mit Wärmestoff, oder ob man den erwärmten Körper nur für einen gewissen Zustand der Materie überhaupt zu betrachten habe? Der Hypothese, dafs die Wärme in Bewegung allein bestehe, ist die Erfahrung nicht zusagend, dafs der Wärmestoff sich nach bestimmten Gesetzen mit den Körpern verbinden und wieder von ihnen trennen läfst. Dafs uns die Art wie sich der Wärmestoff mit den Körpern verbindet, unerklärlich ist, giebt uns nicht die

Befugnifs, ihm die Materialität abzusprechen, weil jede Wirkung auf Materie, nur in Materie gegründet seyn kann. Nach der dynamischen Lehre mufs man die Verbindung des Wärmestoffs mit den Körpern für eine wechselseitige Durchdringung, wie bei allen chemischen Vereinigungen ansehen, und dann würde der Wärmestoff ein Körper seyn, der in allen Verhältnissen mit allen bekannten Körpern mischbar wäre. Wir wissen dafs das specifische Gewicht des Wasserstoffs etwa 214 Tausendmal geringer ist als das des Platin, und daher hat die Annahme nichts gegen sich, dafs es Materien geben könne, deren Feinheit so grofs ist, dafs sich ihr Gewicht durch unsere Vorrichtungen nicht auffinden läfst. Mag man übrigens die Wärme als Materie betrachten oder nicht, so ist doch das mit Gewifsheit anzunehmen, dafs ihre Wirkung auf die Körper nicht allein darin besteht, eine gröfsere Ausdehnung derselben hervorzubringen, also ihre Kohäsion zu schwächen und mehr oder weniger zu vermindern; sondern auch darin, ihnen häufig ganz andere Eigenschaften mitzutheilen, indem die Körper in der erhöheten Temperatur anderen Gesetzen der Verbindung und des Verhaltens zu einander unterworfen sind, als wir in der gewöhnlichen Temperatur an ihnen warnehmen.

Eine ähnliche Wirkung sehen wir bei der Verbindung der Körper mit Wasser eintreten. Der feste Körper wird flüssig, und sein Kohäsionszustand ist bis auf einen gewissen Grad aufgehoben. Erst durch Entfernung des Wassers gelangt er wieder zu seinem frühern Zustande, eben so wie der geschmolzene Körper durch Erkaltung wieder fest wird. Der Körper w i r d also durch die Entfernung des Wassers oder der Wärme erst wieder was er vorher war, und es ist auf keine Weise zu behaupten, ja sogar aller Erfahrung zuwider, dafs er im flüssigen oder aufgelöfsten Zustande dieselben Eigenschaften besitze, welche wir nach Entfernung des Auflösungsmittels an ihm bemerken. Die auffallendste Veränderung bei der Auflösung der Körper ist ohne Zweifel der Verlust des Kohärenzzustandes, und diese Veränderung ist wenigstens eben so grofs, eben so unbegreiflich, als jede andere Veränderung die der Körper durch die Verbindung mit anderen Körpern erleiden kann.

Zu den vielen wichtigen Entdeckungen welche wir Berzelius verdanken, und zu den vielen neuen Verbindungen, deren wahre Natur

wir durch ihn kennen gelernt haben, gehören auch die Verbindungen der Körper mit Wasser, oder die Hydrate. Wir wissen dafs sehr viele Körper die Eigenschaft besitzen, sich mit bestimmten Mischungsgewichten Wasser zu verbinden, welches häufig, auch in den höchsten Graden der Temperatur, nicht wieder entfernt werden kann; ja, dafs mehrere Körper zu ihrem Bestehen so wesentlich des Wassers bedürfen, dafs sie ohne dasselbe bis jetzt nicht haben dargestellt werden können. Und diese ersten Mischungsgewichte Wasser, mit denen sich die Körper verbinden, sind es besonders, wodurch sich ihre Eigenschaften auf eine bemerkbare Weise von denen in dem nicht wasserhaltenden Zustande unterscheiden. Ein auffallendes Beispiel bietet die Schwefelsäure dar. Im wasserfreien Zustande läfst sie sich zwischen den trocknen Fingern halten, zeigt keine saure Reaction und verbindet sich eben so wenig mit den wasserfreien Basen, als sie auf Metalle einwirkt. Die geringste Feuchtigkeit ändert diesen Körper in eine heftig wirkende Säure um. Ein gröfserer Zusatz von Wasser bewirkt dann weit weniger auffallende Veränderungen, und ein Gemisch aus wasserhaltender Schwefelsäure und Wasser scheint sich nicht wesentlich zu verändern, wenn auch das Verhältnifs des Wassers bedeutend vermehrt wird. Was hier von der Schwefelsäure bemerkt ist, gilt mehr oder weniger von andern Körpern bei ihrer Verbindung mit Wasser. Finden wir doch dasselbe Verhalten bei der Vereinigung aller Körper, die sich in mehreren Verhältnissen mit einander verbinden, auf ähnliche Weise wieder. Das erste Mischungsgewicht Sauerstoff, welches sich mit dem Kupfer verbindet, ist es, welches dem Metall ganz neue, durchaus andere Eigengenschaften, als es zuvor besafs, mittheilt; das Kupferoxyd nähert sich dem Oxydul ungleich mehr, als das Oxydul dem Metall. Berzelius hat die Natur der merkwürdigen Verbindungen des Cyan und des Schwefelwasserstoffs mit den Metallen genauer kennen gelehrt. Ein grofser Theil dieser Verbindungen sowohl als derer des Chlors mit den Metallen, ist im Wasser auflöslich, und auch bei diesen Auflösungen sind es die ersten Mischungsgewichte Wasser, welche die Eigenschaften jener Metallverbindungen vorzüglich zu verändern scheinen.

Ganz besonders mufs aber bei der Untersuchung der Frage: in wiefern das Wasser die Eigenschaften der Körper verändert, in Erwägung

gezogen werden, dafs eine chemische Einwirkung der Körper auf einander in der gewöhnlichen Temperatur nur durch die Zwischenkunft des Wassers statt finden kann und dafs uns daher, ohne die Vermittelung desselben, die chemischen Eigenschaften, nämlich diejenigen Eigenschaften der Körper, welche sich auf eine innere Veränderung der Materie beziehen, völlig unbekannt seyn würden.

Wenn man zugeben mufs, dafs der wahre und der einzige Charakter einer chemischen Verbindung darin besteht, dafs specifisch verschiedene Materien sich zu einem homogenen Ganzen vereinigen, so ist kein Grund vorhanden, die Auflösungen der Körper im Wärmestoff und im Wasser, nicht ebenfalls als chemische Verbindungen zu betrachten. Welche Eigenschaften die aus der Verbindung entstandene Mischung besitzen möge, ist hierbei ganz gleichgültig. Die scheinbar geringen Veränderungen in den Eigenschaften, welche die Körper bei der Auflösung im Wasser erleiden, ist vielleicht in der Eigenschaft des Wassers: doppelte Polarisation anzunehmen, begründet, obgleich deshalb eine chemische Vereinigung des aufgelösten Körpers mit seinem Auflösungsmittel nicht geläugnet werden kann. Darauf deuten auch schon die Erscheinungen hin, dafs die Körper eine bestimmte Menge Wasser zur Auflösung erfordern, dafs die Auflösungsfähigkeit des Wassers von der Temperatur abhängig ist, dafs sich die Verdunstungsfähigkeit des Wassers nach der Menge der aufgelösten Körper abändert, dafs sich die auflösende Kraft des Wassers, welches schon andere Körper aufgenommen hat, in manchen Fällen vermehrt, dafs der Siedepunkt des Wassers durch aufgelöste Salze verändert wird, u. s. f. Dafs der aufgelöste Körper nach Entfernung des Wassers unverändert wieder erhalten wird, findet auch bei anderen chemischen Verbindungen statt, z. B. bei den Amalgamen, von denen sich das Quecksilber durch Erhitzung trennen läfst; ferner bei den Auflösungen vieler Metalloxyde in Säuren, welche bei einer angemessenen Erhitzung das Oxyd unverändert zurücklassen u. s. f.

Wenn daher kein zureichender Grund anzugeben ist, die Auflösung der Körper in Wasser und in Wärmestoff für etwas anders als für eine wahre chemische Verbindung zu halten, so geben uns diese Auflösungen unläugbare Beispiele von chemischen Verbindungen nach

ganz unbestimmten Verhältnissen. Eben so müssen alle diejenigen Verbindungen, bei denen ein Bestandtheil in grofsem Uebermaafs vorhanden ist, so lange sie sich im tropfbar flüssigen Zustande befinden, und so lange die völlige Gleichartigkeit der Mischung erwiesen ist, für chemische Verbindungen nach ganz unbestimmten Verhältnissen angesehen werden, denn die homogene Beschaffenheit der Mischung ist das einzig wahre und richtige Kennzeichen einer chemischen Vereinigung.

Wenn wir nun aber, aus einer stark alkalisch reagirenden, so wie aus einer mit einem Uebermaafs von Säure versehenen homogenen Flüssigkeit, in beiden Fällen ein Salz, genau aus denselben Mischungsverhältnissen Säure und Basis bestehend, krystallisiren sehen: so werden wir den Grund dieser merkwürdigen Erscheinung nicht darin suchen können, dafs das Salz schon gebildet in den Flüssigkeiten vorhanden gewesen, und sich das einemal im Ueberschufs der Basis, das anderemal im Uebermaafs der Säure aufgelös't befunden habe; sondern wir werden schliefsen müssen, dafs es sich erst gebildet, und dafs irgend eine Kraft die frühere chemische Verbindung aufgehoben habe. So hat man nach einer Reihe von Jahren aus der Kieselfeuchtigkeit krystallinische, dem Bergkrystall ähnliche Bildungen der Kieselerde sich ausscheiden sehen, und so ist es überhaupt zu erklären, wenn aus flüssigen Mischungen sich erst nach Verlauf von einiger Zeit, Niederschläge oder krystallinische Absonderungen darstellen.

Diese Erfolge führen nothwendig darauf zurück, dafs in vielen Fällen die Verbindung der Körper nach ganz unbestimmten Verhältnissen statt findet, und dafs die Vereinigung nach bestimmten Verhältnissen, die unabänderlichen, stets gleichen Gesetzen unterworfen ist, ein besonderer Fall des allgemeinen Erfolgs der Verbindungen der Körper seyn mufs, welche nicht von chemischen Verhältnissen abhängig, sondern in dem Wesen des entstehenden Körpers begründet ist. Daraus wird es auch einleuchtend, dafs die Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen nicht der Grund der bestimmten Form (Krystallisation) der starren Körper sind, sondern dafs sie vielmehr die nothwendige Folge des Kohärenzzustands der Körper selbst seyn müssen.

Verbindungen, die einer erhöheten Temperatur zu ihrer Bildung bedürfen, verhalten sich häufig auf ähnliche Weise; indeſs ist es schwieriger, den Zustand der Verbindung, so lange die Masse flüssig ist, zu beurtheilen. Untersucht man, wie es in der Regel nur geschehen kann, die Verbindungsverhältnisse, nachdem die Erstarrung erfolgt ist, so erforscht man nicht mehr die ursprünglichen, sondern die durch den Kohärenzzustand der erkalteten Masse bedingten Mischungsverhältnisse. Es würde also in vielen Fällen ein Irrthum seyn, wenn man das durch die Analyse aufgefundene Resultat verallgemeinern und auf alle Kohärenzzustände der sich verbindenden Körper ausdehnen wollte. Von vielen Verbindungen wissen wir, daſs sie in der Hitze und so lange die Masse flüſsig ist, in ganz unbestimmten Verhältnissen statt finden, — zu welcher Annahme uns der ganz homogene Zustand der geschmolzenen Masse berechtigt, — daſs aber nach dem Erkalten andere Mischungsverhältnisse eintreten, welche den Gesetzen unterworfen sind, die Berzelius so vollständig entwickelt hat.

Die neuern Untersuchungen haben gelehrt, daſs der chemische Prozeſs stets mit elektrischen Erscheinungen verbunden ist. Dem chemischen so wie dem elektrischen Verhalten der Körper scheint eine und dieselbe bedingende Ursache zum Grunde zu liegen, nämlich der Gegensatz der Körper selbst. Von dem elektrischen Verhalten kann also das chemische nicht abgeleitet werden, indem beide sich nicht wie Ursache und Wirkung bedingen, sondern sie müssen als die gleichzeitigen Wirkungen einer und derselben Kraft betrachtet werden. Die antiphlogistische Schule erblickte in dem Sauerstoffgas die einzige Quelle des Lichtes; sie leitete aus der Verbindung des Sauerstoffs mit andern Körpern, als Erscheinung das Feuer, und als Erfolg die Säurebildung ab. Wir wissen jetzt, daſs jede Verbindung der Körper mehr oder weniger mit den Erscheinungen des Verbrennens begleitet ist, daſs jeder chemischen Verbindung dieselbe Ursache zum Grunde liegt, und daſs Feuererscheinung, so wie deutlich hervortretendes basisches und saures Verhalten der Körper gegen einander, bloſs durch die Stärke ihres phlogistischen Gegensatzes bedingt werden. So verbrennt, — um ein Beispiel für alle zu wählen, — Eisen mit Schwefel unter Feuerentwicke-

lung und bildet ein Salz, dessen Basis das Eisen, und dessen Säure der Schwefel ist. Dieser verbrennt aber mit Sauerstoff, und stellt dann eine Verbindung dar, in welcher sich der Schwefel als Basis und der Sauerstoff als Säure verhält. Wird diese Verbindung des Schwefels mit Sauerstoff wieder mit einem andern Körper in Gegensatz gebracht, so entsteht ein neues Verbrennen bei der Vereinigung, obgleich damit eine deutliche Feuererscheinung schon seltener, z. B. bei der Einwirkung der Schwefelsäure auf Bittererde, verbunden ist. Je geringer die phlogistische Differenz der Körper ist, welche sich mit einander vereinigen, desto weniger auffallend sind die Erscheinungen bei ihrer Verbindung, und desto weniger bemerkbar wird ihr basisches und saures Verhalten.

Welche Körper aber eine Verbindung mit einander eingehen, läſst sich in Voraus nicht bestimmen, so wenig sich ohne Erfahrung die Umstände angeben lassen, unter welchen die Verbindung erfolgen wird. Wenn man, um diese Umstände näher zu bezeichnen, Verbindungen auf dem nassen und auf dem trocknen Wege unterschied, so lag dabei mehr oder weniger die irrige Ansicht zum Grunde, daſs man die Körper, deren Verbindung beabsichtigt ward, erst in den Zustand der Flüssigkeit versetzen müsse, weil man einen flüssigen Zustand, auſser der unmittelbaren Berührung, für eine nothwendige Bedingung zu ihrer Verbindung hielt, als ob es nöthig sei, eine leichtere Beweglichkeit der vorausgesetzten kleinsten Theilchen der Körper zu bewirken, welche sich im Zustande der Flüssigkeit leichter finden und an einander haften würden. Erst in neuern Zeiten hat man diese Ansicht berichtigt und sich überzeugt, daſs es vorzüglich nur darauf ankomme, die Körper in einen elektrisch chemischen Gegensatz zu bringen und die Kohäsionsspannung aufzuheben. Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, erscheinen Wärme und Wasser nicht mehr als Auflösungsmittel, sondern als Mittel zur Aufhebung des Kohärenzzustandes, oder vielmehr als Mittel, die Hindernisse zu vermindern, welche sich der chemischen Einwirkung der Körper durch die Kohäsion entgegensetzen. Sie dienen daher als Erreger der ruhenden Kräfte der Materie, um den Akt der Verbindung zu vollbringen.

Sind aber Wasser und Wärme nicht mehr als Auflösungsmittel, als Mittel eine leichtere Verschiebbarkeit der Körpertheilchen zu bewir-

ken, sondern als höhere, erregende Potenzen anzusehen, so ist auch der eigentliche flüssige Zustand der Körper nicht erforderlich, um ihre Verbindung zu bewerkstelligen. Der Zustand der Flüssigkeit würde nur dann nothwendig seyn, wenn die Kohärenzspannung so grofs wäre, dafs sie erst durch eine völlige Flüssigkeit der Masse überwunden werden könnte.

Betrachten wir zuerst die auf dem sogenannten trockenen Wege entstehenden Verbindungen. Das kohlehaltige Eisen erleidet durch Glühen, in einer Temperatur welche von dem Schmelzpunkt der Mischung ungemein weit entfernt bleibt, wesentliche Veränderungen. Dieser Erfolg ist um so auffallender, als hier Mischungen und Entmischungen zwischen zwei aufserordentlich strengflüssigen Körpern in einer verhältnifsmäfsig niedrigen Temperatur statt finden. Alle Verbindungen durch die sogenannte Cementation dienen ebenfalls zum Beweise, dafs Flüssigkeit zur Vereinigung der Körper nicht immer erfordert wird. Zwar verliert sich das Auffallende in den Erscheinungen dieses Prozesses dadurch, dafs man sich den einen Körper gewöhnlich im dampfförmigen Zustande denkt, wenn gleich dadurch noch nicht erklärt ist, wie die Verbindung nach der gewöhnlichen Ansicht erfolgen kann, wenn der andere Körper im festen Zustande beharrt; allein bei der Cementation des Eisens mit Kohle wird keiner von beiden Körpern dampfförmig oder tropfbarflüssig, und die Verbindung erfolgt dennoch leicht und schnell, durch die blofse Berührung, in dem erforderlichen Grade der Temperatur. Wenn Eisen, in zolldicken und noch stärkeren Stücken, anhaltend, unter schwachem Luftzutritt, glühend erhalten wird, so verwandelt sich die ganze Masse in Oxydul, und es läfst sich auf diese Weise ein künstlicher Magneteisenstein darstellen. Wird dieser, mit Kohle umgeben, einer anhaltenden Glühhitze ausgesetzt, so verändert sich die ganze, mehrere Zoll starke Masse zuletzt wieder in regulinisches Eisen, obgleich hier eben so wenig ein unmittelbarer Zutritt der Kohle zum Inneren der Eisenmasse, als ein Flüssig- oder Flüchtigwerden der Kohle, des Eisens oder des Eisenoxyduls statt finden kann.

Eben so wenig läfst sich der Erfolg bei dem sogenannten Aufschliefsen der Fossilien, durch Glühen mit Alkalien erklären, wobei die Einwirkung des Alkali auf das Fossil vollständig statt findet, ohne dafs

ein flüssiger Zustand der geglüheten Masse erforderlich ist. Die mehrsten Reduktionen der Metalloxyde in Kohlentiegeln geschahen schon, ehe das Oxyd flüssig wird, und der geschmolzene Metallregulus ist Folge des Prozesses. Sehr strengflüssige Metalle lassen sich aus ihren Oxyden reduciren, ohne dafs das Oxyd und das daraus erhaltene Metall flüssig werden. — Die schwefelsauren Salze ändern sich durch die blofse Cementation mit Kohle in Schwefelverbindungen um, wobei es nicht erforderlich ist, dafs das schwefelsaure Salz oder die entstehende Schwefelverbindung flüssig werden. Am augenscheinlichsten zeigt sich die Verbindungsfähigkeit nicht geschmolzener Körper, bei der Vereinigung der für sich allein, wenigstens in dem angewendeten Hitzgrade unschmelzbaren Erden. Die schmelzbare Schlacke, oder das Glas, bilden sich, indem zwei oder mehrere ungeschmolzene Körper auf einander wirken.

Aus allen diesen Erscheinungen leuchtet es deutlich ein, dafs der flüssige Zustand als solcher, nicht die wesentliche Bedingung zu den Verbindungen der Körper seyn kann, welche in einer erhöheten Temperatur erfolgen, sondern dafs der chemische Prozefs vielmehr durch die Temperaturerhöhung nur eingeleitet, der Erfolg desselben aber durch den Kohärenzzustand, sowohl der in Aktion begriffenen Körper, als der aus ihrer Vereinigung entspringenden Verbindung bedingt wird.

Bei allen Verbindungen und Trennungen, die auf dem trockenen Wege, nämlich durch Temperaturerhöhung bewirkt werden müssen, ist es schwierig, dem Verlauf der Erscheinungen zu folgen. Weil man das Produkt in den mehrsten Fällen im geschmolzenen Zustande erhält, so setzt man voraus, dafs sich auch die Körper, oder wenigstens einer derselben, aus deren Verbindung es entstanden ist, vor der Vereinigung im flüssigen Zustande befunden haben müssen. Das Gegentheil läfst sich daher nur in solchen Fällen mit Zuverlässigkeit nachweisen, wo sich die auf einander wirkenden Körper, bei dem angewendeten Grade der Temperatur, noch gar nicht im flüssigen Zustande befinden konnten.

Deutlicher mufs sich nachweisen lassen, dafs Verbindungen und Trennungen der Körper auf dem sogenannten nassen Wege, und bei gewöhnlicher Temperatur, wirklich statt finden können, ohne die auf einander wirkenden Körper in einen flüssigen Zustand zu versetzen, und

ohne der Anwendung von Wasser, als eines sonst für unentbehrlich gehaltenen Auflösungsmittels, zu bedürfen. Wenn sich gleich bei der Anstellung solcher Versuche die Einwirkung der atmosphärischen Feuchtigkeit nicht vermeiden läfst, so wird man derselben doch den Erfolg des Prozesses nicht zuschreiben können, weil es sich nicht darum handelt, die Entbehrlichkeit des Wassers bei den Mischungen und Entmischungen in der gewöhnlichen Temperatur darzuthun, sondern zu zeigen, dafs ein flüssiger Zustand für die in chemischer Aktion befindlichen Körper nicht erforderlich ist.

Die hier mitgetheilten Versuche sind auf die Weise angestellt, dafs die zu vereinigenden, vollkommen lufttrocknen Körper, in einem Agatmörser trocken zusammengerieben und dabei gröfstentheils in den Verhältnissen angewendet wurden, welche den chemischen Mischungsgewichten entsprechen. Wo sich durch Farbenveränderung, oder durch andere Anzeigen, auf die erfolgte Verbindung oder Zersetzung nicht schliefsen liefs, blieb nichts übrig, als den Geschmack entscheiden zu lassen. Die Mischung ward dann mit möglichst trockener Zunge gekostet, und obgleich dabei, strenge genommen, der Einwurf nicht widerlegt werden kann, dafs die Zersetzung erst auf der Zunge selbst erfolgt seyn könne; so ist der erste Eindruck welchen die Geschmacksnerven erleiden, doch gewifs die Wirkung eines schon gebildeten, und nicht die eines erst entstehenden Körpers. In allen Fällen, wo die entstehende Verbindung weder durch Farbe, Geruch oder Geschmack deutlich unterschieden werden kann, läfst sich freilich auf eine erfolgte Zersetzung mit Zuverlässigkeit nicht schliefsen, und gerade der Umstand, dafs die Zwischenkunft des Wassers, die hier eben vermieden werden soll, in den mehrsten Fällen nur das Criterion einer wirklich erfolgten Einwirkung der Körper abgeben kann, verhindert es, das aus diesen Versuchen zu ziehende Resultat sogleich in seiner ganz allgemeinen Gültigkeit zu übersehen.

Krystallisirte Kleesäure und basisches kohlensaures Kali. Das Gemenge wird beim Zusammenreiben sogleich feucht, und die Kohlensäure entweicht brausend. Eben so verhalten sich krystallisirte Weinsteinsäure und Citronensäure.

Benzoësäure und basisches kohlensaures Kali. Das Gemenge bleibt trocken, und durch fortgesetztes Reiben verschwindet der alkalische Geschmack gänzlich. Bernsteinsäure zeigt dasselbe Verhalten.

Benzoësäure und frisch gebrannte Kalkerde. Es scheint keine Verbindung statt zu finden; wenigstens war, auch bei einem Uebermaafs von Säure, nach halbstündigen Reiben der kaustische Geschmack noch deutlich zu bemerken. Benzoësäure und frisch gelöschter, zwischen Löschpapier schnell und so viel als möglich getrockneter Kalk verhalten sich wie Benzoësäure und basisches kohlensaures Kali.

Sublimat und basisches kohlensaures Kali. Bei trockner Luft kann das Zusammenreiben des Gemenges lange fortgesetzt werden, ehe eine Wirkung eintritt. Die geringste Feuchtigkeit ändert die weifse Farbe zuerst in eine gelbe, dann in eine braun- und ziegelrothe um.

Sublimat und frisch gebrannter Kalk. Das Ganze bleibt weifs, aber in dem Augenblick des Anhauchens des zusammengeriebenen Gemenges stellt sich, wie durch einen elektrischen Schlag veranlafst, plötzlich die rothbraune Farbe ein. Reibt man die Kalkerde vorher mit Baumöl an, um alle wässrige Feuchtigkeit desto sicherer abzuhalten, so kann das Zusammenreiben mit Sublimat lange, ohne die geringste Farbenänderung fortgesetzt werden. Ein Hauch ist hinreichend, sogleich die röthlichgelbe Farbe hervortreten zu lassen.

Kalomel und basisch kohlensaures Kali. Bei trockner Luft lassen sich beide Körper lange zusammen reiben, ehe eine Einwirkung statt findet. Diese erfolgt aber augenblicklich und giebt sich durch den plötzlichen Uebergang aus der weifsen in die dunkelgraue Farbe zu erkennen, sobald das Gemenge angehaucht wird.

Kalomel und frisch gebrannter Kalk. Die Wirkung tritt genau so ein, wie beim Sublimat angeführt worden ist, nur dafs statt der rothen, die graue Farbe beim Anhauchen zum Vorschein kommt.

Salmiak, zusammengerieben mit Wismuth, mit Mangansuperoxyd, mit rothem Quecksilberoxyd, mit Zinkoxyd, mit Wismuthoxyd und mit Spiesglasoxyd, entwickelt weder beim trocknen Reiben, noch nach dem Anfeuchten eine Spur von Ammoniak.

Salmiak mit Eisenfeile, mit Eisenoxydul, mit Eisenoxyd und Mennige trocken zusammengerieben, entwickelt kein Ammoniak, wohl aber, wenn das Gemenge angefeuchtet wird.

Salmiak, zusammengerieben mit Glätte, mit frisch gebranntem Kalk, mit basisch kohlensaurem Kali und mit Quecksilberoxydul, giebt schon beim trocknen Reiben eine Entwickelung von Ammoniak, welche sich indefs beim Anfeuchten bedeutend verstärkt.

Salmiak und salpetersaures Silberoxyd zersetzen sich vollständig durch trocknes Zusammenreiben. So lange das Gemisch dem Licht nicht ausgesetzt ist, bleibt es vollkommen weifs und hat das Ansehen von trocknem Mehl. Sobald es dem Sonnenlicht ausgesetzt wird, schwärzt es sich sogleich, und die Masse wird im ersten Augenblick sehr deutlich feucht, wobei sich auch ein schwacher Geruch von Salpetergas bemerken läfst.

Salmiak und Borax entwickeln beim trocknen Zusammenreiben sogleich starke Ammoniakdämpfe. Gebrannter Borax mufs erst eine geraume Zeit mit dem wasserfreien Salmiak gerieben werden, ehe der Ammoniakgeruch zum Vorschein kommt.

Kleesaures Ammoniak und Glätte, so wie kleesaures Ammoniak und basisches kohlensaures Kali entwickeln beim trocknen Zusammenreiben augenblicklich starke Ammoniakdämpfe.

Kochsalz und Glätte wirken beim trocknen Zusammenreiben nicht auf einander; die alkalische Reaction stellt sich erst nach dem feuchten Reiben ein.

Krystallisirtes schwefelsaures Eisenoxydul-Oxyd und Cyan-Eisen-Kalium geben beim trocknen Zusammenreiben sogleich Berlinerblau. Diese Wirkung tritt auch ein, wenn die Cyanure zuvor mit Oel angerieben ist.

Krystallisirtes schwefelsaures Eisen-Oxydul-Oxyd und basisch kohlensaures Kali. Das Gemenge wird beim trocknen Reiben bald feucht und backend, und bekommt eine schwarzbraune Farbe. Derselbe Erfolg findet statt, wenn das Alkali zuvor mit Oel angerieben wird. Eine grüne Farbe kommt erst beim Befeuchten zum Vorschein.

Krystallisirtes schwefelsaures Kupferoxyd und basisches kohlensaures Kali. Beim trocknen Reiben wird die Masse sogleich feucht, backend und dunkelblau. Wird das Alkali vorher mit Oel gerieben, so stellt sich die dunkelblaue Farbe dennoch ein. Erst durch Zutritt von Feuchtigkeit kommt in beiden Fällen die grüne Farbe zum Vorschein.

Salzsaurer Baryt und schwefelsaures Kupferoxyd geben beim Zusammenreiben sogleich eine schöne zeisiggrüne Mischung, die Salze mögen trocken oder mit Oel angefeuchtet gerieben werden. Nach den verschiedenen Verhältnissen des salzsauren Baryts zum Kupfervitriol, lassen sich alle Nuançen der blauen Farbe von der grünlichblauen bis zur blafsgrünen darstellen.

Salzsaurer Baryt und schwefelsaures Eisenoxydul-Oxyd geben beim trocknen Reiben augenblicklich ein braungelbes Gemisch.

Schwefelsaures Kali und salpetersaurer Baryt zersetzen sich beim trocknen Reiben vollständig und stellen ein trocknes Mehl dar, welches ganz den Geschmack des Salpeters besitzt, wenn beide Salze im richtigen Verhältnifs angewendet worden sind.

Chromsaures Kali (neutrales, oder einfach saures, citronengelbes) und salpetersaures Bleioxyd geben beim trocknen Reiben sogleich ein pomeranzengelbes Pulver.

Chromsaures Kali und Kupfervitriol zersetzen sich zu einem braunen Pulver.

Chromsaures Kali und salpetersaures Silberoxyd. Es entsteht augenblicklich ein rothes Pulver, auch wenn das chromsaure Kali zuvor mit vielem Oel eingerieben worden ist.

Chromsaures Kali und Eisenvitriol zersetzen sich zu einem hellbraunen Pulver.

Chromsaures Kali und Sublimat zersetzen sich beim trocknen Reiben nicht; erst beim Anhauchen geht die Farbe aus dem Gelben ins Rothe über.

Chromsaures Kali und Kalomel zersetzen sich ebenfalls nicht, selbst nicht beim Anhauchen, sondern erst durch Befeuchten mit Wasser.

Chromsaures Kali und essigsaures Quecksilberoxydul geben beim trocknen Zusammenreiben ein gelblichbraunes Gemisch, welches erst beim Befeuchten einen Strich ins Grüne erhält.

Chromsaures Kali und verwittertes Cyan-Eisen-Kalium zersetzen sich nicht.

Salpetersaures Bleioxyd und Kupfervitriol werden beim trocknen Zusammenreiben augenblicklich feucht und das Gemisch erhält eine lichte blauliche Farbe.

Salpetersaures Bleioxyd und Eisenvitriol werden ebenfalls sogleich feucht, und das Gemisch erhält eine schmutzigweifse Farbe.

Essigsaures Kali und Eisenvitriol fliefsen beim Zusammenreiben fast augenblicklich zu einer schmierigen, röthlich braunen Masse zusammen.

Salpetersaures Bleioxyd und Eisen-Kalium-Cyan. Bei lange fortgesetzten trocknen Reiben, bleibt noch immer der Geschmack von salpetersaurem Bleioxyd, wenn auch, wie der Vorsicht wegen geschehen mufs, das Eisen Kalium Cyan in Uebermaafs angewendet wird. Dieser Geschmack geht durch Befeuchten des Gemenges sogleich verloren.

Salpetersaures Bleioxyd und schwefelsaures Kali, entwickeln beim trocknen Reiben merkbare Wärme, und bei einem richtigen Verhältnifs beider Körper läfst sich mit der Zunge nur der Geschmack von Salpeter an dem trocknen Mehl bemerken, indem sich der eigenthümliche süfsliche Geschmack des Bleisalzes ganz verloren hat.

Schwefel und Antimon, so wie Schwefel und Zink lassen sich weder durch trocknes noch durch feuchtes Zusammenreiben mit einander vereinigen. Wenn aber Schwefel und Wismuth stark und anhaltend gerieben werden, so entwickelt sich aus dem Gemisch Schwefelwasserstoffgas vermittelst des Königswassers. Durch feuchtes Zusammenreiben scheint die Verbindung eben nicht befördert zu werden.

Schwefel und Eisen lassen sich durch trocknes Reiben nicht vereinigen; wird das Gemenge aber angefeuchtet, so entwickelt es, bei fortgesetzten Reiben Schwefelwasserstoffgas, wenn es mit Schwefelsäure oder Salzsäure behandelt wird.

Schwefel und Eisenoxydul, Eisenoxyd, Quecksilberoxydul, Quecksilberoxyd, Zinkoxyd, Wismuthoxyd und Bleioxyd zeigen, weder beim trocknen noch beim feuchten Reiben Wirkung auf einander.

Schwefel und Quecksilber vereinigen sich zwar schon beim trocknen Reiben sehr leicht, indefs wird die Verbindung durch Feuchtigkeit ungemein beschleunigt. Concentrirte Salzsäure entwickelt sogleich Schwefelwasserstoffgas aus der geriebenen Mischung.

Zinnober und Eisen, Eisenoxydul, Eisenoxyd und gebrannter Kalk wirken weder beim trocknen noch beim feuchten Reiben auf einander.

Diese Beispiele lassen es nicht bezweifeln, dafs alle Verbindungen, welche in der gewöhnlichen Temperatur vor sich gehen, schon vollständig erfolgen, ohne dafs dazu ein flüssiger Zustand der Mischung, oder auch nur eines der in die Verbindung eingehenden Körper erforderlich wäre. Aber weit entfernt, aus diesem Erfolge auf die Entbehrlichkeit des Wassers bei den Verbindungen der Körper in der gewöhnlichen Temperatur schliefsen zu können, giebt derselbe vielmehr den überzeu-

gendsten Beweis, daſs ohne Zwischenkunft des Wassers gar keine Verbindung statt findet, und daſs in den Fällen wo sie wirklich erfolgt, die durch das Reiben entwickelte Wärme, die Ursache zu den Verbindungen und Trennungen gewesen seyn muſs.

Bei allen Körpern welche Wasser, chemisch gebunden (als Krystallwasser) enthalten, sehen wir die Verbindungen und Trennungen schnell und fast augenblicklich eintreten. Körper die kein Krystallwasser enthalten, wirken nur dann auf einander, wenn Feuchtigkeit hinzu tritt. Diese Erfolge sind nur eine Bestätigung des längst anerkannten Naturgesetzes, daſs chemische Einwirkung der Körper in gewöhnlicher Temperatur, und in allen Fällen, wo die Wärme die Stelle des Wassers nicht vertreten kann, ohne Zutritt von Feuchtigkeit unmöglich ist. Mit diesem Einfluſs des Wassers auf Verbindungen und Trennungen, als chemisch wirkender Potenz, hat man aber nur zu oft die unrichtige Ansicht verbunden, daſs das Wasser, bei allen Verbindungen auf dem sogenannten nassen Wege, auch die Funktion zu vertreten habe, die Körper zu ihrer chemischen Einwirkung auf eine mechanische Weise vorzubereiten, ihre Theilchen zu trennen und sie in den Zustand der Flüssigkeit zu versetzen. Es giebt Körper die auf nassem und auf trocknem Wege fast auf gleiche Weise auf einander wirken. So zersetzt das Zink z. B. das Hornsilber in der gewöhnlichen Temperatur, unter Zutritt von Wasser oder von feuchter Luft, fast eben so schnell als in der erhöheten Temperatur, ohne daſs weder in dem einen oder in dem andern Fall ein flüssiger Zustand von beiden, oder auch von einem der auf einander wirkenden Körper, die Bedingung zum Gelingen des Prozesses wäre. Wird alle Feuchtigkeit abgehalten, so wirken Zink und Hornsilber nicht mehr auf einander und die Einwirkung findet, ohne Zwischenkunft des Wassers, nicht eher wieder statt, als bis die Temperatur bis zum dunklen Glühen erhöhet worden ist.

Nur in wenigen Fällen scheinen jedoch Wasser und Wärme sich zur Aufhebung der Kohärenzspannungen der auf einander wirkenden Körper wechselseitig vertreten zu können, und immer ist die Wärme ein weit kräftigeres Mittel die Kohäsionsänderung der Körper zu bewirken, als das Wasser. Deshalb können sich Körper auf trocknem Wege mit einander verbinden, deren Vereinigung durch Vermittelung des Was-

sers nicht geschehen kann, deshalb erfolgen die Verbindungen auf dem trocknen Wege schneller als auf dem nassen, und deshalb ist der Erfolg der Einwirkung der Körper in den gewöhnlichen und in den erhöheten Temperaturen häufig sehr verschieden, indem durch die Wärme oft ein ganz anderer Gegensatz der Körper, als durch das Wasser hervorgebracht, und die Erregung durch Temperaturerhöhung ungemein mehr, als durch das Wasser verstärkt wird.

Wenn wir sehen, dafs Eisen und Schwefel in der gewöhnlichen Temperatur sich nur dann mit einander verbinden lassen, wenn sie mit Wasser zusammengerieben werden; so kann, weil weder der eine noch der andere Körper im Wasser auflöslich ist, von der Wirkung des Wassers, als eines Auflösungsmittels die Rede nicht seyn; wir würden höchstens nur voraussetzen können, dafs es in so fern wirke, als es vielleicht durch das Eisen zersetzt wird. Wenn wir aber zugleich die Erfahrung machen, dafs das oxydirte Eisen weder durch trocknes, noch durch feuchtes Zusammenreiben mit dem Schwefel verbunden werden kann, so werden wir nothwendig schliefsen müssen, dafs Eisen und Schwefel an der Wasserzersetzung ganz gleichen Theil nehmen, oder vielmehr, dafs das Wasser auf eine noch nicht erklärte Weise dazu dient, die Verbindung des Eisens mit dem Schwefel einzuleiten.

Schneller zwar sehen wir eine ganz gleiche Wirkung beim Zusammenreiben des Quecksilbers mit dem angefeuchteten Schwefel eintreten, indem durch die Zwischenkunft des Wassers der chemische Gegensatz beider Körper verstärkt wird; allein alle diese Erfolge in der gewöhnlichen Temperatur finden doch nur langsam statt, und eine kaum bis zum Rothglühen gesteigerte Temperatur bewirkt schneller und kräftiger eine Verbindung, die durch Wasser nur langsam und unvollkommen erfolgte. So wird z. B. der schwefelsaure Baryt nur durch lange anhaltendes Kochen mit einer wässrigen Auflösung des kohlensauren Kali zersetzt, wogegen die Zersetzung weit schneller und vollständiger durch das Glühen bewirkt wird. Ohne Erhöhung der Temperatur findet aber auch auf dem sogenannten nassen Wege keine Zersetzung statt, und diese Temperaturunterschiede sind es, welche den Schlüssel zu der Erklärung der Erfolge bei den sogenannten reciproken Verwandtschaften geben müssen.

Wärme und Wasser sind also die Mittel deren sich die Natur bedient, um Verbindungen und Trennungen der Körper einzuleiten. Sie dienen dabei nicht als Auflösungsmittel, indem der flüssige Zustand der zur Mischung und Entmischung sich vorbereitenden Körper bei ihrer chemischen Einwirkung so wenig wesentlich nothwendig ist, dafs man ihn für zufällig und auf die einzelnen wenigen Fälle sich beziehend ansehen kann, wo die aus dem Kohärenzzustande der Körper entspringenden Hindernisse, durch eine völlige Flüssigkeit überwunden werden müssen.

Entsteht aber jetzt die Frage, wie man sich die Wirkung der Wärme und des Wassers zu erklären habe, und warum zum Akt der Verbindung der Zutritt von Wasser oder von Wärme durchaus erforderlich sei; so läfst sich eine befriedigende Antwort nicht geben. Wir wissen nur aus dem Erfolge, dafs Wasser und Wärme als Erreger der Kräfte der Materie dienen, und dafs sie der Kohäsionsthätigkeit entgegen wirken; allein die Ursache eines solchen Erfolges kennen wir so wenig, als wir den Grund der Elektricitätsäufserungen angeben können, welche durch die Berührung der Körper hervorgebracht werden. Höchstens ist es erlaubt anzunehmen, dafs beiden Kraftäufserungen der Materie eine und dieselbe Ursache zum Grunde liegt, dafs sie nur dem Grade nach verschieden sind und dafs, durch die, durch Wasser oder durch Wärme verstärkte Erregung der Kräfte bei der Berührung, ein wirklicher Uebergang der Körper in einander, eine vollkommene Durchdringung der Materie entstehen kann. Deshalb hören alle Kraftäufserungen in dem Augenblick auf, wo die chemische Verbindung vollbracht ist, und deshalb können sie sich, nach den verschiedenen Graden wie die Körper auf einander wirken, auch auf eine sehr verschiedene Weise als Erscheinung darstellen. Immer wird man aber darauf zurückkommen müssen, in dem Gegensatz der Körper selbst, die nächste Ursache ihrer Kraftäufserungen zu finden, welche durch Wasser und Wärme vielleicht nur in sofern verstärkt werden, als diese störend auf das Gleichgewicht der Kräfte einwirken.

Ohne jedoch Untersuchungen weiter nachzugehen, die noch nicht dazu geeignet sind, einen Aufschlufs über die geheimnifsvolle Natur der Materie zu verschaffen, sehen wir wenigstens als Erfolg der Erscheinungen,

welche die Einwirkung der Körper begleiten, dafs Wärme und Wasser die Thätigkeit der Kräfte vermehren und dafs, — wenigstens so weit unsere Erfahrung reicht, — die Kraftäufserung der Körper, ohne Zwischenkunft des Wassers oder der Wärme, niemals bis zu dem Grade gesteigert werden kann, dafs ein wirklicher Uebergang der sich berührenden Körper in einander, den wir die chemische Verbindung nennen, erfolgen könnte.

Wüfsten wir den Grund, warum sich überhaupt zwei Körper mit einander verbinden, so würde auch die Ursache einleuchten, weshalb nur einige Körper eine Verbindung mit einander eingehen, und andere keine Verbindungsfähigkeit für einander zu haben scheinen; warum einige Körper sich vorzugsweise mit einander vereinigen und Trennungen hervorbringen; warum die Verbindungen nur unter gewissen Umständen erfolgen, und warum sie nach bestimmten Verhältnissen statt finden. Diese bestimmten Verhältnisse sind es, deren nähere Kenntnifs in den neuesten Zeiten, vorzüglich durch Berzelius, eifrig erforscht, und zu einem so hohen Grade von Vollständigkeit entwickelt worden ist, dafs sich in den mehresten Fällen der Erfolg der chemischen Einwirkung der Körper auf einander, im Voraus durch Rechnung bestimmen, und das Verhältnifs genau angeben läfst, nach welchem jeder Körper zur Bildung der neu entstandenen Verbindung beigetragen hat. Weil diese bestimmten Verhältnisse, oder die Mischungsgewichte, aber weder mit der Verbindungsfähigkeit der Körper zu einander in irgend einem Zusammenhang stehen, noch als die Wirkung der allgemeinen Anziehung betrachtet werden können, indem sie von der specifischen Schwere ganz unabhängig sind, am allerwenigsten aber von der Form, von der Stellung und von dem Gewicht hypothetisch angenommener Atome abgeleitet werden dürfen, indem nicht die Form durch die Mischung, sondern die Mischung durch die Form bestimmt wird, folglich das Bedingte nicht das Bedingende, die Wirkung nicht zugleich die Ursache seyn kann; so mufs der Grund dieses merkwürdigen Verhaltens in der Natur der entstehenden Verbindung selbst aufgesucht werden, und da ergiebt sich nur der Kohärenzzustand der Mischung als das die Mischungsgewichte Bestimmende.

Wenn also die Ursache der Verbindung überhaupt, und der Umstände unter denen sie nur statt finden kann, in dem Gegensatz

und in der Natur der auf einander wirkenden Körper gesetzt werden mufs; so ist der chemische Erfolg dieser Einwirkung, nämlich das Mischungsverhältnifs, nicht mehr von den in chemischer Aktion befindlichen Körpern, sondern einzig und allein von dem Kohärenzzustande der entstehenden Mischung abhängig. Nur dadurch wird es erklärbar, warum sich die Mischungsverhältnisse immer nach der Temperatur richten, warum Temperaturunterschiede in vielen Fällen schon hinreichend sind, die Verbindungsverhältnisse zu ändern und warum, selbst bei gleich bleibenden Mischungsverhältnissen, eine Verbindung in einer höheren Temperatur inniger als in einer minder erhöheten Temperatur zu werden vermag.

Auf diese letzte merkwürdige Erscheinung hat Berzelius ebenfalls aufmerksam gemacht. Sie kann ihren Grund nur in der Veränderung des Kohärenzzustandes der Körper haben, und zeigt sich wahrscheinlich in einer weit gröfseren Allgemeinheit, als sie bis jetzt beobachtet worden ist. Die aus Schwefel und Eisen bestehende Mischung, welche in einer niedrigen Temperatur gebildet worden ist, zersetzt sich an der feuchten Atmosphäre ungleich schneller, als die aus demselben Mischungsverhältnifs zusammengesetzte, in einer höheren Temperatur entstandene Verbindung, welche chemisch von der ersteren nicht verschieden ist. Jene erste Verbindung erlangt die Eigenschaft der letzteren, wenn sie einer höheren Temperatur ausgesetzt wird, wobei ein elektrisches Glühen die ganze Masse durchfährt. Weil die Mischung von der Form und die Form von dem Kohärenzzustande des Körpers abhängig ist, und durch denselben unmittelbar bedingt wird; so kann es nicht auffallen, wenn ein und derselbe Körper, und wenn er auch ein chemisch einfacher wäre, in sofern durch irgend eine Veranlassung sein Kohärenzzustand verändert worden ist, nicht immer dieselbe Form annehmen sollte. Vom Schwefel ist ein solches Verhalten wirklich bekannt und erst kürzlich von Hrn. Mitscherlich näher nachgewiesen worden. Die durch sogenannte Absorbtion entstehenden Verbindungen sind ebenfalls ohne Zweifel Verbindungen, die nur eine geringe Innigkeit erlangt haben.

Wenn also von dem Kohärenzzustande der entstehenden Mischung die Mischungsgewichte abhängig sind, und wenn sich daraus auch er-

klärt, warum die Mischungsverhältnisse in den verschiedenen Temperaturen verschieden sich ausbilden, so würde doch aus einem solchen Verhalten nur einleuchtend werden, warum die Körper bei ihren Verbindungen mit einander mehrerer Vereinigungsstufen fähig sind, d. h., warum die Mischungsgewichte das von Berzelius entwickelte bestimmte Verhältniſs 1., 2., 3., oder irgend ein anderes befolgen; allein es geht daraus nicht die Wahrscheinlichkeit hervor, daſs eine Verbindung in ganz unbestimmten Verhältnissen statt finden wird. Hierauf ist indeſs zu entgegnen, daſs sich alle Verbindungen, deren Mischungsverhältnisse untersucht worden sind, auf einen ganz bestimmten Kohäsionszustand der entstandenen Verbindung beziehen, und daſs Mischungen nach unbestimmten Verhältnissen, wenn sie vorhanden sind, nur im flüssigen Zustande der Verbindung, oder überhaupt in demjenigen Zustande aufgefunden werden können, in welchem der Kohärenzzustand der Mischung durch Wasser oder durch Wärme überwältigt ist. Am wenigsten dürfte es aber gelingen, unbestimmte Mischungsverhältnisse jemals aufzufinden, bei Mischungen, welche aus der innigen Vereinigung gasförmiger Körper entstehen, weil die durch die Elasticität gegebene Kohärenzform nur schwer überwunden werden kann, weshalb sie Verbindungen erschwert und Trennungen befördert, und daher immer nur auf einen bestimmten Kohärenzzustand des entstehenden Produkts zurückgeführt werden kann.

Eben so werden sich bestimmte Mischungsverhältnisse immer dann ausbilden müssen, wenn eine flüssige Mischung, ganz oder theilweise, durch Ruhe in den festen Zustand übergeht, weil der bestimmte Kohärenzzustand des sich bildenden festen Körpers nothwendig ein bestimmtes Mischungsverhältniſs bedingt. Ob aber feste Körper, welche sich wieder zu einer festen Verbindung vereinigen, ohne sich vorher in dem Zustand der Flüssigkeit befunden zu haben, diese Vereinigung nur nach bestimmten Verhältnissen bewirken, dürfte vorzüglich von dem Kohärenzzustande der Mischung abhängen, obgleich es sehr schwer ist, den Zustand der Mischung in dieser Hinsicht zu prüfen, weil die Prüfung entweder nur durch Hülfe des Wassers, oder auch nach dem erfolgten Erkalten der Mischung geschehen kann, in beiden Fällen aber Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen erhalten werden, welche

sich erst ausgebildet haben und in dem ursprünglichen Zustand der Verbindung nicht vorhanden waren.

Wenn uns aber auch dieser Zustand der Verbindung der Körper völlig unbekannt bleibt, und wir nur in einigen wenigen Fällen aus dem Verhalten der Mischung auf den Verbindungszustand einen Schlufs machen können; so wissen wir doch das mit völliger Gewifsheit, dafs jede Verbindung der Körper, welche sich im flüssigen Zustande, — derselbe mag durch Wasser oder durch Wärme herbeigeführt seyn, — als eine homogene Mischung zu erkennen giebt, auch eine wahre chemische Verbindung seyn mufs. Wollte man sie nicht dafür gelten lassen, so würde man den Unterschied zwischen chemischer Verbindung und mechanischer Mengung völlig aufheben.

Diese flüssigen Mischungen geben aber sehr häufig Beispiele von chemischen Verbindungen nach ganz unbestimmten Verhältnissen. Wie weit sich die Verbindungsfähigkeit der Körper in diesem Zustande der überwundenen Kohärenz erstreckt, dürfte der Gegenstand einer sorgfältigen Prüfung werden müssen, indem die bisherigen Untersuchungen über die Mischungsverhältnisse nur auf einen bestimmten Kohärenzzustand der Materie gerichtet waren. Wenigstens zeigen diese Verbindungen die Möglichkeit der Vereinigung der Materie nach ganz unbestimmten Verhältnissen, und beweisen, dafs die Befolgung fester Mischungsverhältnisse nur ein besonderer, durch den Kohärenzzustand der entstehenden Verbindung bestimmter Fall des allgemeinen Vereinigungsakts aller Materie ist.

Wenn es möglich wäre, die Ursache, wodurch Mischungen nach ganz unbestimmten Verhältnissen in den flüssigen Zustand versetzt worden sind, so plötzlich zu entfernen, dafs sich die durch ruhiges Festwerden der Mischung ausbildenden Verbindungen nach bestimmten Mischungsgewichten gar nicht bilden könnten; so würde das Resultat eine feste chemische Verbindung der in der flüssigen Mischung vereinigt gewesenen Körper nach unbestimmten Verhältnissen der Mischung seyn müssen. In den mehresten Fällen wird aber unter solchen Umständen das allgemeine Verbindungsstreben durch die Wirkungen der Kohäsionskraft vernichtet. Diese verlangt eine Vereinigung nach bestimmten Mischungsverhältnissen, und jenes vermag sich nur da zu äufsern, wo der

Kohärenzzustand der sich vereinigenden Körper, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, aufgehoben ist. Daraus würde also folgen, dafs durch die plötzliche Aufhebung des flüssigen Zustandes, nur in dem Fall eine feste Verbindung nach unbestimmten Mischungsverhältnissen entstehen könnte, wenn das allgemeine Verbindungsstreben den Wirkungen der Kohäsionskraft das Gleichgewicht hält. Nach aller Erfahrung tritt aber ein solcher Erfolg niemals ein, sobald die Hindernisse weggeräumt sind, welche den Kohärenzäufserungen der Körper entgegen standen; denn eben darauf, dafs der Erfolg eines jeden chemischen Prozesses, einer jeden chemischen Einwirkung eines Körpers auf den andern, durch den Kohärenzzustand der entstehenden Mischung bedingt wird, beruht unsere ganze Kenntnifs von der Verbindung der Körper, deren Gesetze wir schon mit so grofser Zuverlässigkeit und Genauigkeit kennen, dafs es nicht mehr gestattet ist, den leisesten Zweifel in ihrer Richtigkeit zu setzen.

Aber so wie alle Kraftäufserungen, wenn sie ihr Maximum erreicht haben, sich in ihren Wirkungen zuletzt so sehr verlieren, dafs die Gesetze, denen sie unterworfen sind, kaum noch erkannt werden können; so scheint es auch bei den Kraftäufserungen der Kohärenz im Konflikt mit dem chemischen Verbindungsstreben der Fall zu seyn. Das allgemeine Gesetz der Trägheit in der Mechanik, nach welchem die Körper in ihrem Zustand der Ruhe und Bewegung beharren, wenn sie nicht durch eine äufsere Ursache genöthigt werden, diesen Zustand zu verlassen; scheint auch auf das Fortbestehen der einmal gebildeten chemischen Mischungen Anwendung zu finden, indem die Mischungsveränderungen nicht plötzlich eintreten, sondern jede Mischung und Entmischung eine gewisse Zeit erfordert, in welcher sie erst vollständig vollbracht werden kann. Ein sehr passendes Beispiel bietet der Schwefel dar, welcher auf das Chlor anfänglich keine Wirkung zu haben scheint, sich dann aber plötzlich und mit Explosionen mit demselben verbindet. Dieser Zeitraum wird in allen den Fällen freilich nicht mefsbar seyn, wo ein starker elektrochemischer Gegensatz der auf einander wirkenden Körper statt findet, oder wo die Kohäsionskraft des sich ausscheidenden Körpers ungleich wirksamer gedacht werden mufs, als die Kraft, welche alle in der Mischung befindlichen Körper zu Einem

Ganzen verbindet. Wo aber diese Bedingungen nicht in einem ausgezeichneten Grade vorhanden sind, läfst sich sehr wohl die Möglichkeit einsehen, dafs eine flüssige Mischung, oder überhaupt eine Mischung, welche sich in einem solchen Kohärenzzustande befindet, dafs sie Verbindungen nach unbestimmten Verhältnissen zuläfst, durch plötzliches Erstarren die Mischungsverhältnisse nicht ändert, so dafs das Resultat der plötzlichen Erstarrung ein ganz anderes, als das der langsamen Erkaltung seyn mufs.

Bei allen Mischungen nach unbestimmten Verhältnissen, welche durch Auflösung auf dem nassen Wege entstehen, läfst sich ein solcher Erfolg nicht leicht warnehmen, weil noch kein Verfahren bekannt ist, das Auflösungsmittel plötzlich zu entfernen. Merkwürdig ist indefs die Erfahrung, dafs eine Salzauflösung, welche schnell von + 140 bis zu — 6 Gr. Fahrenh. erkältet wird, durchaus gefriert, ohne dafs eine Ausscheidung des Salzes statt findet, wogegen bei minder plötzlichen Temperaturübergängen, das Wasser krystallisirt und die Salzauflösung koncentrirt wird. Dieser Erfolg zeigt, dafs Wasser und Salz, nicht allein im flüssigen, sondern auch im festen Zustande, unter gewissen Umständen nach unbestimmten Verhältnissen verbunden bleiben. — Wenn wir dagegen aus einem flüssigen Amalgam, also aus einer Verbindung des Quecksilbers mit einem anderen Metalle in ganz unbestimmten Verhältnissen, ein festes Amalgam durch Ruhe sich ausscheiden sehen; so ist dies der gewöhnliche Erfolg der Kohärenzthätigkeit, welche eine Mischung nach unbestimmten Verhältnissen, auf eine Verbindung nach bestimmten Mischungsverhältnissen, zurückzuführen strebt. Daher sind wir auch nicht berechtigt, das flüssige Amalgam für eine Auflösung des Amalgams nach bestimmten Mischungsgewichten, in Quecksilber anzusehen; sondern wir müssen es, so lange es als eine homogene Flüssigkeit erscheint, für eine Mischung nach unbestimmten Verhältnissen betrachten; gerade so wie eine Salzauflösung in Wasser, aus welcher das Salz durch Ruhe krystallisirt, ein einfaches Beispiel giebt, wie eine Mischung nach unbestimmten Verhältnissen, auf Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen zurückgeführt wird.

Mischungen nach unbestimmten Verhältnissen, welche auf dem trocknen Wege, bei einem gewissen Kohärenzzustande der Mischung,

erhalten werden, würden leichter Beispiele von der Beibehaltung des unbestimmten Mischungsgewichtes nach erfolgter Erkaltung darbieten können, weil es in vielen Fällen leichter möglich ist, das Auflösungsmittel — die Wärme — plötzlich zu entfernen, als dies bei den Auflösungen auf dem nassen Wege geschehen konnte. Wirklich fehlt es auch nicht an Beispielen dieser Art, deren Zahl sich unbezweifelt mehren wird, wenn man erst gröfsere Aufmerksamkeit auf die Untersuchung des Zustandes der Verbindungen richten wird, welche durch plötzliches und durch langsames Erstarren einer und derselben Mischung erhalten werden.

Die unter dem Namen des Roheisens bekannte Verbindung des Eisens mit Kohle, welche im flüssigen Zustande eine zwar homogene, aber fast immer eine Verbindung beider Metalle nach ganz unbestimmten Mischungsverhältnissen darstellt, verhält sich beim plötzlichen Erkalten durchaus anders als bei der langsamen Erstarrung. Im ersten Fall bleiben Kohle und Eisen eben so verbunden, wie sie es im Zustande der Flüssigkeit waren; im letzten Fall scheidet sich die Kohle theils rein aus, theils in Verbindung mit Eisen nach bestimmten Mischungsverhältnissen. — Diese Verbindungen sind also nicht in der flüssigen Mischung vorhanden, sondern sie sind das Resultat der langsamen Erkaltung, welche die Ausbildung von Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen herbeiführte. — Gold und Silber vereinigen sich beim Schmelzen sehr leicht in allen Verhältnissen zu einem homogenen Gemisch. Wird die geschmolzene Legirung schnell zum Erstarren gebracht, so behält die erstarrte Masse die homogene Beschaffenheit, welche ihr im flüssigen Zustande zukam. Erfolgt die Abkühlung sehr langsam, so trennt sich das Gold gröfstentheils, in Verbindung mit etwas Silber, aus der Masse. — Zinn und Eisen vereinigen sich beim Schmelzen fast in allen Verhältnissen zu einer gleichartigen Verbindung. Wird die flüssige Mischung schnell zum Erstarren gebracht, so bleibt sie homogen; erfolgt die Abkühlung langsam, so trennt sie sich und stellt zwei Verbindungen dar, aus vielem Eisen und wenig Zinn, und aus vielem Zinn und wenig Eisen. Wenn geschmolzenes Blei mit weniger Schwefel versetzt wird, als die Mischungsverhältnisse des Schwefelblei, oder des sogenannten Bleiglanzes erfordern, so bildet sich eine homogene

flüssige Masse; es entsteht also eine Mischung nach unbestimmten Verhältnissen. Wird diese plötzlich zum Erstarren gebracht, so behält das Gemisch seine gleichartige Beschaffenheit. Erfolgt die Abkühlung langsam, so scheidet sich regulinisches Blei aus, und es bildet sich gleichzeitig Bleiglanz, also eine Verbindung nach einem bestimmten Mischungsverhältnifs.

Ob mehrere Metalle, bei ihrer Verbindung mit weniger Schwefel, als zur Sättigung, oder vielmehr zur Hervorbringung bestimmter Mischungsverhältnisse erforderlich ist, ein ähnliches Verhalten im flüssigen Zustande und nach der mehr oder weniger verzögerten Erstarrung befolgen, ist noch nicht bekannt. Nach der Vorstellung, die man sich jetzt von Verbindungen dieser Art gemacht hat, würde man sie für blofse Zusammenschmelzungen des Schwefelmetalles mit dem im Ueberschufs vorhandenen Metall zu halten haben. Das Verhalten des Bleies mit Schwefel zeigt indefs, dafs diese Annahme nicht allgemeine Gültigkeit hat, und dafs vielleicht auch bei anderen Schwefelmetallverbindungen die Erstarrungsart berücksichtigt werden mufs. Das rothbrüchige Eisen enthält, wenigstens sehr häufig, einen geringen Antheil Schwefel, welcher, nach den verschiedenen Temperaturzuständen, vielleicht bald mit der ganzen Masse des Eisens, bald mit einem Theil desselben, zu Verbindungen nach bestimmten Verhältnissen, verbunden seyn, und dadurch Veranlassung zu dem eigenthümlichen Verhalten dieses Eisens geben könnte, welches in der Weisglühhitze und bei der gewöhnlichen Temperatur sehr fest und haltbar ist, in der Rothglühhitze aber brüchig wird und sich nicht schmieden läfst.

Auch Schwefel und Phosphor, so wie Schwefel und Arsenik, gehören zu den Körpern, die sich in allen Verhältnissen mit einander verbinden und ein Beispiel von Mischungen nach unbestimmten Verhältnissen geben. — Aber ungleich einleuchtendere und viel häufiger vorkommende Beispiele von Verbindungen nach unbestimmten Verhältnissen, als die Metalle, oder die nicht oxydirten Körper darbieten, gewähren die Verbindungen von oxydirten Körpern. Die sogenannten Erden, die Alkalien und die Metalloxyde, lassen sich, bei einem angemessenen Grade der Temperatur, fast in allen Verhältnissen mit einander verbinden, und stellen im geschmolzenen Zustande eine homogene Mischung

dar, welche, wegen ihrer vollkommenen Gleichartigkeit, als eine wahre chemische Verbindung angesehen werden mufs. Wenn diese Mischung schnell erstarrt, so bleibt sie sehr häufig durchaus gleichartig, und ist im Allgemeinen unter dem Namen der Flüsse, Gläser oder Schlacken bekannt. Die Gleichartigkeit der Masse, und in vielen Fällen auch die Durchsichtigkeit derselben, lassen es durchaus nicht bezweifeln, dafs diese Verbindung nicht eine wahre chemische Mischung sei.

Ganz anders ist das Verhalten bei einem höchst langsamen und verzögerten Erstarren. Das glasige geflossene Ansehen ist verschwunden, statt des muschligen oder des splittrigen Bruches mit Glasglanz, hat sich ein erdiges Ansehen, ein körniges oder auch ein strahliges Gefüge mit deutlich warnehmbaren Absonderungsflächen eingestellt, und die vorher durchsichtige oder durchscheinende Masse ist vollkommen undurchsichtig geworden. Alle diese wesentlichen Veränderungen sind ganz allein der Erfolg eines schnelleren oder langsameren Erkaltens. Bei diesen auffallenden Erscheinungen kann es nicht zweifelhaft seyn, dafs die Kohäsionsthätigkeit im ersten Fall dem allgemeinen Verbindungsstreben unterlag, und dafs sie erst bei einer langsamen Erstarrung, Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen hervorzurufen vermogte.

Alle Erfahrungen lehren ferner, dafs es des flüssigen Zustandes der Körper, zu ihrer chemischen Einwirkung auf einander nicht bedarf. Wenn daher eine durch plötzliches Erstarren erhaltene Mischung nach unbestimmten Verhältnissen, einem Grade der Temperatur ausgesetzt wird, welcher die Masse, ohne sie zum Schmelzen zu bringen, in einen solchen Zustand versetzt, dafs die Kohärenzspannungen so weit aufgehoben werden, als nöthig ist, damit die Kräfte der Körper zur chemischen Einwirkung auf einander thätig werden; so würde der Erfolg des anhaltenden Glühens solcher festen Mischungen, mit demjenigen übereinstimmen müssen, welcher erhalten wird, wenn die Mischung aus dem flüssigen Zustande durch höchst langsames Erkalten in den festen übergeht. Es werden sich also durch anhaltendes Glühen dieser, durch plötzliches Erstarren erhaltenen Mischungen, in einer Temperatur, welche sich jedesmal nach der Beschaffenheit der Mischung richten wird, ebenfalls Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen bilden müssen. Und so ist es auch in der That. Das weifse Roheisen und der

harte Stahl, welche durch plötzliches Erstarren der geschmolzenen Verbindung aus Eisen und Kohle erhalten werden, ändern sich durch bloſses Glühen zu Verbindungen ganz anderer Art um, welche sich durch Farbe, Härte, Festigkeit, Glanz und Gefüge wesentlich von der ursprünglichen Verbindung unterscheiden. Die durch plötzliches Erstarren erhaltene Verbindung von Blei mit wenigem Schwefel, wird durch bloſses Glühen eben so in Bleiglanz und in regulinisches Blei zerlegt, als wenn die flüssige Masse höchst langsam erstarrt wäre. — Die glasigen Schlacken ändern sich durch anhaltendes Glühen, in einer oft gar nicht beträchtlich hohen Temperatur, genau eben so zu matten, erdigen, krystallinischen Verbindungen um, als wenn sie in dem noch flüssigen Zustande ganz langsam erkaltet wären.

Also in allen diesen Fällen sehen wir das durch plötzliches Erstarren gehemmte Ausbilden von Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen, durch das bloſse Glühen dieser nach unbestimmten Mischungsverhältnissen zusammengesetzten Verbindungen, eben so bestimmt und eben so deutlich eintreten, als wenn die flüssige Masse langsam und ruhig erkaltet, und die Kohäsionsthätigkeit, welche jederzeit dem allgemeinen Verbindungsstreben entgegen wirkt, und Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen hervorruft, durch das plötzliche Erstarren, in ihrer Wirksamkeit nicht gestört oder unterdrückt worden wäre.

Diese Erfahrungen geben einen Aufschluſs über die Veränderungen, denen verschiedenen Körper, und ohne Zweifel alle Verbindungen, welche durch plötzliches Erstarren einer Mischung erhalten werden, wobei die Kraft der Kohäsion durch das allgemeine Verbindungsstreben unterdrückt ward, durch die Art des Abkühlens nach dem Schmelzen, oder auch wohl nur nach dem Glühen, in der Farbe, Härte, im Glanz und in der ganzen Textur unterworfen sind. Es ist nämlich einleuchtend, daſs eben sowohl wie die nach unbestimmten Verhältnissen zusammengesetzten Mischungen, auch die Mischungen, denen ein ganz bestimmtes Verhältniſs zum Grunde liegt, bei ihrem plötzlichen Uebergange aus dem flüssigen in den festen Zustand, dem Mangel an Ausbildung bestimmter Formen unterliegen können; wobei ungefehr dasselbe Verhältniſs, wie bei den plötzlich erfolgenden pulverigen Nieder-

schlägen, und bei den langsam sich absetzenden krystallinischen Bildungen auf dem nassen Wege, statt finden mag. Solche Mischungen nach bestimmten Verhältnissen sind, in dieser Rücksicht, denen nach unbestimmten Verhältnissen zusammengesetzten, gleich zu setzen, denn beide stellen eine im eigenthümlichen Sinn des Wortes geflossene Masse dar, aus welcher durch die Kohäsionsthätigkeit, wenn die Umstände ihrer Wirksamkeit günstig sind, erst eine bestimmte Form hervorgehen soll. Der einzige Unterschied zwischen dem Verhalten dieser Mischungen nach bestimmten und unbestimmten Verhältnissen besteht, wie es scheint, nur darin, dafs es ungemein viel schwieriger ist, eine aus unbestimmten Verhältnissen zusammengesetzte Mischung, durch langsames Erkalten, oder durch das Glühen der plötzlich erstarrten Mischung, auf bestimmte Formen, die sich durch ausgebildete Krystalle zu erkennen geben, zurück zu führen. Was die Kohäsionsthätigkeit bei Mischungen nach bestimmten Verhältnissen sehr leicht zu bewirken vermag, ist bei Mischungen nach unbestimmten Verhältnissen oft nur in der Annäherung möglich.

Es giebt Fälle, wo sich die Wirkung des schnelleren und des langsameren Erkaltens nur auf eine Veränderung des Kohärenzzustandes allein zu beschränken scheint, und vielleicht tritt ein solcher Erfolg auch selbst bei den Mischungen nach bestimmten Verhältnissen ein. Als Beispiel dieser Art ist vorhin schon der Schwefel genannt worden; auch der Phosphor zeigt ein ähnliches Verhalten. Wird er bis 50 Gr. Reaum. erhitzt, so bleibt er, bei dem langsamen Erkalten an der Luft, weifs und durchsichtig; erkältet man ihn plötzlich im kalten Wasser, so wird er schwarz und undurchsichtig. Aus dem einen dieser Zustände kann man ihn, so oft man will, in den andern übergehen lassen. — Das unter dem Namen des Arsenikglases bekannte Arsenikoxyd, bildet ein farbenloses, vollkommen durchsichtiges Glas, wenn es beim Sublimiren schnell erkaltet. Es wird weifs, emailleartig und völlig undurchsichtig, wenn die Abkühlung langsam erfolgt, oder wenn das Glas lange Zeit der Einwirkung der Luft ausgesetzt ist. Eine Zu- oder Abnahme des Gewichtes findet dabei durchaus nicht statt.

Ungleich häufiger ist aber mit dieser Veränderung des Kohärenzzustandes, auch eine Veränderung in den Mischungsverhältnissen verbunden.

Das gewöhnliche Glas, diese allgemein bekannte Verbindung, giebt davon ein sehr nahe liegendes und auffallendes Beispiel. Schnell abgekühlt ist es im höchsten Grade spröde, wie die Glastropfen zeigen; bei langsamer Abkühlung besitzt es die bekannten Eigenschaften, und wenn die Erstarrung durch anhaltende Erhitzung verzögert wird, so verliert es den Karakter des Glases und wird zu einem Email, oder nimmt wohl gar eine steinartige Struktur an. Eben dieser Erfolg läfst sich durch das Glühen des Glases hervorbringen, wie schon das sogenannte Reaumursche Porzellan zeigt.

Bei allen diesen Veränderungen bleibt zwar die Mischung dieselbe, aber die Mischungsverhältnisse ändern sich, indem die Kohäsionskraft bei dem verzögerten Erstarren, oder bei dem anhaltenden Glühen thätig werden, und Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen ausbilden kann. Deshalb erhalten auch alle Gläser und Flüsse durch langsames Erstarren, oder, welches für den Erfolg immer dasselbe ist, durch anhaltendes Glühen, um so leichter eine steinartige Struktur, je zusammengesetzter sie sind, indem dann eine gröfsere Kombination in den Mischungsveränderungen, welche nach bestimmten Verhältnissen erfolgen können, möglich ist.

Aus Hall's bekannten Versuchen geht hervor, dafs es blofs von der Art der Erstarrung abhängt, ob man aus Fossilien von der Trappformation und aus natürlichen Laven, durchsichtige Gläser oder undurchsichtige steinartige und krystallinische Massen darstellen will, und dafs sich nach Willkühr die Gläser in Steine und die Steine wieder in Gläser verwandeln lassen. — Diese vortrefflichen Versuche, so wie die mit vieler Sorgfalt und zum Theil mit grofser Ausführlichkeit angestellten Untersuchungen über die sogenannte Entglasung, von Reaumur, Bosc d'Antic, Dartigues, Fleuriau de Bellevue, Watt und Fourmy erhalten, wie es scheint, ihre richtige Deutung erst durch die hier nachgewiesene Ausbildung von Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen, wozu es des flüssigen Zustandes der Mischung keinesweges bedarf. Dieser letzte Umstand ist es auch, der für die Erklärung geologischer Erscheinungen vorzüglich wichtig seyn dürfte, weil man sich die Masse, in welcher Krystalle vorkommen, die schmelzbarer als die Grundmasse, worin sie sich befinden, selbst sind, nicht mehr

flüssig, sondern nur in einem solchen Zustande denken darf, daſs die Kohäsionsthätigkeit das allgemeine Verbindungsstreben in dem Augenblick ihrer Bildung zu überwinden vermogte. Die von de Drée aufgestellten, durch Versuche erwiesenen sehr scharfsinnigen Ansichten, welche sich auf eine theilweise Erweichung einer ausgebildeten Verbindung beziehen, können, weil sie ein specieller Fall des allgemeinen Erfolgs der Schmelzung und Erstarrung sind, nur zur Erklärung der besonderen, auf einen solchen Erfolg gerichteten Erscheinungen dienen.

Das Glühen schon erstarrter Mischungen in einem gehörigen Grade der Temperatur, ist in vielen Fällen ein weit wirksameres Mittel, eine Veränderung des Mischungsverhältnisses hervorzubringen, als das mehr oder weniger verzögerte Erstarren der flüssigen Verbindung. Ohne Zweifel ist dies Verhalten so sehr von den Eigenschafsen der auf einander wirkenden und der aus dieser Einwirkung entstehenden Körper abhängig, daſs sich für jeden besonderen Fall sehr verschiedenartige Erscheinungen darbieten werden. Ein Beispiel der Verbindungsfähigkeit in ganz unbestimmten und sehr veränderlichen Verhältnissen, geben, unter anderen Körpern, das Kupfer und das Zinn. 100 Theile Zinn lassen sich mit 50, 100 und 200 Theilen Kupfer zu einer Mischung zusammen schmelzen, die nicht allein im flüssigen Zustande, sondern auch nach dem langsamen oder plötzlichen Erstarren, vollkommen gleichartig bleibt. Alle drei Verbindungen sind spröde und weiſs von Farbe. Ihre völlige Gleichartigkeit läſst keinen Zweifel übrig, daſs sie nicht als wirkliche chemische Verbindungen des Kupfers mit dem Zinn, also als Verbindungen nach ganz unbestimmten Mischungsverhältnissen, auch im erstarrten Zustande zu betrachten wären. Alle diese Mischungen leiden durch Glühen keine Veränderung. Vergröſsert man das Verhältniſs des Kupfers zum Zinn, etwa so, daſs 100 Theile des letzteren mit 400 Theilen des ersteren verbunden sind, so erhält das Metallgemisch, beim höchst langsamen Erkalten im Tiegel, auf der Oberfläche ein gestricktes Ansehen und auf der Bruchfläche ein dichtes Gefüge, verbunden mit einer schmutzigweiſsen Farbe und mit beträchtlicher Sprödigkeit. Wird diese Legirung schnell in einer kalten eisernen Form ausgegossen, so behält sie ihre Eigenschaften, so daſs sie durch langsames oder beschleunigtes Erstarren keiner Mischungsveränderung zu unterliegen

scheint. Glüht man sie aber in einer die Rothglühhitze erreichenden Temperatur; so hängt es ganz von der Art der Erkaltung des geglüheten Gemisches ab, ob es dieselben Eigenschaften wie vor dem Glühen behalten, oder ob es eine gelbliche, weiche und dehnbare Mischung mit körnigem Gefüge bilden soll. Letzteres ist der Fall, wenn das glühende Gemisch durch Ablöschen im Wasser plötzlich erkaltet wird, wogegen sich die ursprüungliche Verbindung durch langsames Abkühlen an der Luft wieder herstellt. Wird die Temperatur beim Glühen etwas zu sehr erhöhet, so schwitzen auf der Oberfläche des noch starren Gemisches ganz kleine, silberweifse Perlchen aus, welche indefs bald wieder verschwinden, wenn die Erhitzung fortdauert, so dafs das ganze Gemisch in Flufs kommt und die Veränderungen durch das Glühen nicht weiter bemerkt werden können. Diese Erscheinungen beim Glühen sowohl, als die ungleichartige Beschaffenheit der Bruchfläche des plötzlich erkalteten geglüheten Gemisches, deuten darauf hin, dafs die Mischung in der Hitze, welche zum Schmelzen noch nicht hinreicht, ein anderes Mischungsverhältnifs eingeht, indem sich eine leichtflüssigere, aus mehr Zinn und weniger Kupfer bestehende Verbindung bildet, welche durch langsames Erkalten wieder zerstört wird, durch schnelles Ablöschen im Wasser aber gebildet bleibt, weil die Erstarrung schneller erfolgt, als sich die frühere allgemeine Verbindung beider Metalle wieder herstellt. Bei allen den Mischungen, welche ein gröfseres Verhältnifs an Zinn enthalten, konnten diese Veränderungen durch das Glühen nicht eintreten, weil die zu grofse Leichtflüssigkeit eine Veränderung des Mischungsverhältnisses unmöglich machte. Aus demselben Grunde stellte sich auch bei diesem, aus 100 Zinn und 400 Kupfer bestehenden Gemisch, die ursprüngliche allgemeine Verbindung beider Metalle, durch das langsame Abkühlen nach dem Glühen, vollständig wieder her. Diese Mischungsveränderungen durch die Temperaturunterschiede und durch die Art des Erkaltens der rothglühenden Massen, erklären zugleich, warum sich diese Metallmischung in Rücksicht ihrer Dehnbarkeit und Hämmerbarkeit in der Rothglühhitze genau eben so verhält, wie nach dem plötzlichen Erkalten, und warum das langsam erstarrte, so wie das noch nicht bis zum Rothglühen erhitzte Gemisch, spröde sind und sich unter dem Hammer nicht bearbeiten lassen.

Wird das Verhältnifs des Kupfers zum Zinn noch mehr vergröfsert, verbindet man z. B. 100 Zinn mit 1100 Kupfer, — und dies ist das Verhältnifs, welches man gewöhnlich beim Kanonenguth anwendet, — so bieten sich ganz andere Erscheinungen dar. Bei einem höchst langsamen Erkalten des flüssigen Gemisches erscheint dasselbe dem unbewaffneten Auge ganz gleichartig; durch das Vergröfserungsglas läfst sich indefs die Ungleichartigkeit auf der frischen Bruchfläche leicht auffinden und bemerken, dafs sich ein weifses Metallgemisch zwischen den gestrickten Flächen eines röthlichgelben Metallgemisches abgetrennt hat. Die gebohrte, abgedrehte, getriebene, geschliffene und polirte Oberfläche erscheint nur deshalb gleichartig, weil das zähere röthlichgelbe Metallgemisch durch diese, mit einem mechanischen Ausstrecken derselben verbundene Bearbeitung, das Hervortreten der weifsen, spröden und in kleinen Körnchen eingelagerten Verbindung verhindert. — Bringt man das flüssige Metallgemisch plötzlich dadurch zum Erstarren, dafs man es in schwachen Zainen in einer möglichst dicken, kalten, eisernen Form ausgiefst; so erhält man ein durchaus gleichartiges Gemisch, auf dessen Bruchfläche sich durch die stärkste Vergröfserung nichts Ungleichartiges bemerken läfst. Die Mischung bleibt also homogen, wie sie es im flüssigen Zustande war. Wird dieser Zain in einer starken Rothglühhitze anhaltend geglüht und im glühenden Zustande plötzlich im Wasser abgelöscht, so behält er seine gleichartige Beschaffenheit; läfst man ihn sehr langsam an der Luft erkalten, so bekommt er die Beschaffenheit der langsam an der Luft erstarrten flüssigen Legirung, d. h. es bildet sich eine weifse, körnige Verbindung aus, welche sich in der überwiegenden Masse einer gestrickten röthlichgelben Mischung eingelagert findet. Dieses langsam erstarrte Gemenge verhält sich beim anhaltenden Glühen auf ähnliche Art. Wird es glühend im Wasser abgelöscht, so ist es durchaus gleichartig; erstarrt es langsam, so behält es seine Ungleichartigkeit bei. Eine aus 100 Zinn und 1100 Kupfer zusammengesetzte Mischung kann also nur in der erhöheten Temperatur, nämlich in der Schmelzhitze, oder in einer starken Rothglühhitze gleichartig seyn; sinkt die Temperatur, so bilden sich wenigstens zwei Verbindungen aus, und die so erstarrte Mischung ist ein Gemenge von wenigstens zwei Verbindungen nach bestimmten chemischen Mischungs-

verhältnissen, deren Bildung sich durch plötzliches Erstarren verhindern läfst. Dies Metallgemisch verhält sich beim Glühen also ganz anders als das d'Arcetsche, und diese Verschiedenheit des Verhaltens ist eine Folge des veränderten Verhältnisses des Zinnes zum Kupfer, welches bei der d'Arcetschen Metallkomposition grofs genug war, um mit dem Kupfer in allen Temperaturen vereinigt zu bleiben, in der Glühhitze aber zur Entstehung von zwei Verbindungen Veranlassung zu geben, welche sowohl in der Schmelzhitze, als in der gewöhnlichen Temperatur wieder zerstört wurden. Die Metallmischung zum Kanonenguth enthält so wenig Zinn, dafs beide Metalle der Schmelzhitze, oder einer sehr erhöheten Temperatur bedürfen, um mit einander verbunden zu bleiben, und dafs durch Temperaturerniedrigung eine Trennung eintritt, welche sich nur durch plötzliches Erkalten mehr oder weniger vollständig verhindern läfst.

Unser metallenes Geschütz ist daher, — eben so wie das gegossene eiserne, — keine chemische Verbindung zweier Metalle, sondern ein Gemenge von wenigstens zwei Verbindungen des Kupfers mit Zinn, welche, so zu sagen, mechanisch in einander geflochten sind. Eine aus 100 Zinn und 1100 Kupfer bestehende Mischung, würde also nur dann eine gleichartige Verbindung seyn können, wenn es möglich wäre, das flüssige Gemisch plötzlich zur Erstarrung zu bringen, oder das langsam erstarrte metallene Geschütz einer starken Glühhitze auszusetzen und plötzlich im Wasser abzukühlen. Beides ist aber wegen der grofsen Masse des Gufsstücks unausführbar. Ueberläfst man, wie es nicht anders seyn kann, die flüssige Metallmischung der langsamen Abkühlung in der Geschützform; so sollte der Erfolg des Erstarrens für die Beschaffenheit des Geschützes um so günstiger seyn, d. h. die Metallmischung sollte um so homogener ausfallen, je mehr die Erstarrung beschleunigt würde. Die Erfahrung zeigt aber das Gegentheil. Der Widerspruch in den Erscheinungen ist indefs nur scheinbar, indem es nicht mehr darauf ankommt, durch plötzliches Erstarren eine homogene Beschaffenheit des Metallgemisches zu bewirken, welche sich bei so starken Massen nicht erzwingen läfst; sondern durch ein sehr langsames Erstarren eine möglichst regelmäfsige und gleich vertheilte Nebeneinanderlagerung der sich ausbildenden Verbindungen hervorzubringen. Ist

daher die Masse, woraus die Gufsform besteht, ein starker Wärmeleiter; so wird die strengflüssigere Verbindung schnell zum Erstarren gebracht und es tritt die sehr belehrende und über den Erfolg des Erstarrungsprozesses vieles Licht verbreitende Erscheinung ein, dafs sich, nachdem das Metall in der Form schon erstarrt ist, die ausgebildete leichtflüssigere Metallmischung in die Höhe begiebt und auf dem sogenannten verlornen Kopf des Geschützes aussprudelt. Statt sich zu senken und durch das Erstarren zusammen zu ziehen, scheint die Metallmischung vielmehr sich auszudehnen, indem sie in der Form in die Höhe steigt. Untersucht man den Zustand eines auf solche Art erstarrten Geschützes, so findet man die Bruchfläche voll Blasen und Höhlungen und das Geschütz ist unbrauchbar. Ein solches ausgequollenes Metallgemisch, — welches eine weifse Farbe hat und grofse Sprödigkeit besitzt, — fand ich aus 21 Zinn und 79 Kupfer zusammengesetzt, welches, nach den Verhältnifsgewichten von Berzelius, mit einem Gemisch aus 1 M. G. Zinn und 7 M. G. Kupfer fast ganz genau übereinstimmt. — Ist die Formmasse, — wie dies bei der neueren Giefsmethode der Fall ist, — mit eisernen Formkapseln umgeben, so erhitzen sich dieselben nach dem Gufs jedesmal sehr stark, sobald die eben erwähnten Erscheinungen des Aufsteigens der leichtflüssigeren Metallmischung eintreten. Wählt man aber die ältere Formmethode in Lehm, oder bedient man sich beim Kapselgufs einer möglichst wenig Wärme leitenden und dichten, wenig porösen Formmasse; so erhitzen sich die eisernen Formkapseln nicht, das Metall senkt sich und erstarrt ohne dafs ein Aufsteigen der leichtflüssigeren Metallmischung statt fände. Das Metallgemisch wird länger flüssig erhalten, indem es eines drei bis viermal längeren Zeitraumes zum Erstarren bedarf, so dafs das strengflüssigere Metallgemisch, im Augenblick der Bildung nicht plötzlich erstarrt, sondern dem leichtflüssigeren Metallgemisch noch Wärme entzieht, wodurch eine regelmäfsige Nebeneinanderlagerung dieser beiden Verbindungen herbeigeführt wird. Beide Verbindungen stellen sich auf der frischen Bruchfläche, schon dem unbewaffneten Auge, sehr auffallend dar. Die chemische Zusammensetzung der strengflüssigeren Verbindung läfst sich nicht ausmitteln, weil es nicht möglich ist, dies rothe und zähe Metallgemisch von dem mechanisch eingeflochtenen weifsen und spröden

zu trennen. Das letztere kann man aber rein erhalten, indem es sich wegen seiner Leichtflüssigkeit zum Theil in die Formmasse zieht, wenn das strengflüssigere Gemisch schon erstarrt ist, so dafs es von der mechanischen Verbindung mit dem letzteren frei bleibt. Dieses weifse, spröde und harte, von den Geschützgiefsern so genannte Krätzmetall, habe ich aus 17,7 Zinn und 82,3 Kupfer zusammengesetzt gefunden, eine Zusammensetzung die, nach den Verhältnifsgewichten von Berzelius, mit einem Gemisch aus 1 M. G. Zinn und 9 M. G. Kupfer ganz genau übereinstimmt. Es bilden sich also leichtflüssige Verbindungen von Zinn und Kupfer nach zwar bestimmten, aber sehr verschiedenen Verhältnissen aus, bei denen der Kupfergehalt in dem Grade wächst, wie die Erstarrung beschleunigt wird. In einem solchen Erfolge mögte auch der Grund zu suchen seyn, warum sich, nach den Erfahrungen der Artilleristen, die Stücken von schwererem Kaliber nie so dauerhaft zeigen als die von schwächerem, wenn sie nicht allein aus einem auf dieselbe Art zusammengesetzten Metallgemisch, sondern auch gleichzeitig bei einem und demselben Gufs angefertigt werden. Die Seele des schweren Geschützes ist weicher und erweitert sich daher durch den Gebrauch schneller als die Seele des Geschützes von leichteren Kaliber, weil das Geschütz von schwererem Kaliber beim Gufs eine ungleich gröfsere und weit langsamer erkaltende Masse darbietet, in welcher die durch das langsame Erkalten entstehende leichtflüssige Metallmischung weniger Zinn enthält, folglich weicher ist, als die leichtflüssige Verbindung, welche bei dem schnelleren Erstarren gebildet wird.

So führen also auch diese Erscheinungen zu dem Resultat, dafs nicht allein die Mischungsverhältnisse der entstehenden Verbindungen, in manchen Fällen durch die Temperaturverschiedenheiten bestimmt werden, sondern dafs auch schon entstandene Verbindungen, durch blofses Glühen, eine Veränderung ihres Mischungsverhältnisses erleiden können, ohne dafs ein flüssiger Zustand der Mischung, oder die Entwickelung gasartiger Stoffe nothwendig erfordert wird.

Ueber
den Saigerhüttenprozefs.

Von
Hrn. KARSTEN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 19. Februar 1824.]

Schon seit einigen Jahrhunderten wird der Saigerhüttenprozefs, mit unwesentlichen Abänderungen, fast eben so ausgeübt, wie Agrikola, Erker und Löhneys ihn beschreiben. So einfach die Saigerarbeit erscheint, so mögte sie doch zu den schwierigsten und in ihren Gründen am wenigsten erkannten metallurgischen Operationen zu zählen seyn, und kaum ist es zu glauben, dafs sie einem anderen Umstande als dem Zufall ihre Entstehung verdankt. Die Geschichte des Saigerhüttenbetriebes vor Agrikola's Zeit kennen wir nicht und daher läfst sich auch nicht mehr ausmitteln, welche Vervollkommnungen und Verbesserungen dieser Prozefs nach und nach erhalten haben mag, bis ihm der Grad von Vollkommenheit zu Theil ward, in welchem wir ihn in der Mitte des sechszehnten Jahrhunderts erblicken.

Der Zweck der Saigerhüttenarbeit ist die Trennung des Silbers von dem silberhaltigen Kupfer, vermittelst des Bleies. Man erreicht ihn dadurch, dafs man das Kupfer mit einer angemessenen Menge Blei verbindet und die entstandene Verbindung auf eine eigenthümliche Weise wieder aufhebt. Das Silber trennt sich dabei vom Kupfer, indem es sich mit dem Blei vereinigt, in dessen Verbindung es im flüssigen Zustande, bei einem gewissen Temperaturgrade, das alsdann noch starr bleibende Kupfer verläfst. Es liegt also diesem Prozefs eigentlich die Absicht zum Grunde, den Silbergehalt des Kupfers mit Blei in Verbindung zu bringen, weil diese Metallmischung sich durch einen einfachen, aber sehr sinnreichen Oxydationsprozefs, der unter dem Namen der

Treibarbeit bekannt ist, leicht aufheben und auf diese Weise das Silber rein darstellen läſst, welches in Vereinigung mit dem ungleich strengflüssigeren und weniger oxydablen Kupfer nicht geschehen konnte.

Sehr einfach würde der Saigerprozeſs seyn, wenn die Verbindung von Blei und Kupfer, in einer Temperatur, welche zum Flüssigwerden des Kupfers noch nicht hinreicht, vollständig wieder aufgehoben werden könnte. Die Trennung beider Metalle ist aber nur bis zu einem gewissen Verhältniſs durch die Saigerung zu bewirken. Einen Theil des in dem abgesaigerten Metallgemisch, oder in dem Kiehnstock zurückgebliebenem silberhaltigen Bleies, sucht man durch starkes Glühen, unter Zutritt von atmosphärischer Luft, oder durch die sogenannte Darrarbeit zu gewinnen. Ein andrer Theil läſst sich aber auch auf diese Weise aus dem Kiehnstock nicht abscheiden, sondern der Bleigehalt des abgedarrten Kiehnstocks, oder des Darrlings, muſs durch Einschmelzen des bleihaltigen Kupfers vor dem Gebläse, oder durch das sogenannte Gaarmachen, entfernt werden.

Die Entsilberung des Kupfers wird folglich durch die Operationen des Frischens, des Saigerns, des Darrens, des Treibens und des Gaarmachens verrichtet. Bei einer jeden dieser Operationen fallen Zwischenprodukte verschiedener Art, welche unter dem Namen der Dörner oder Krätzen bekannt sind. Durch sie wird der Saigerhüttenprozeſs sehr verwickelt und kostbar und seine Ausführbarkeit in ökonomischer Rücksicht zum groſsen Theil von ihrer zweckmäſsigen Benutzung abhängig.

Die Verwandtschaft des Bleies zum Silber scheint, wenn das Resultat des Prozesses das Anhalten zur Beurtheilung geben soll, — und das ist es ja, welches bei allen Verwandtschaftserfolgen zum Grunde gelegt wird, — so bedeutend gröſser zu seyn, als die des Kupfers zum Silber, daſs die letztere fast als verschwindend erscheint. Der Rückhalt an Silber im Kupfer steht daher auch beinahe im Verhältniſs zu der Menge Blei, welche nach dem Darren mit dem Kupfer verbunden bleibt. Sehr silberreiches Kupfer läſst sich deshalb durch eine einmalige Saigerung nicht entsilbern, vorzüglich weil das Verhältniſs des Bleies zum Kupfer beim Frischen, aus technischen und ökonomischen Gründen, nicht über eine gewisse Gränze hinaus vergröſsert werden darf.

Die theoretischen Gründe worauf der Saigerhüttenprozefs beruht, werden sich bei der Betrachtung der einzelnen Arbeiten, durch welche die Silberscheidung bewirkt wird, besser übersehen lassen.

1. Das Frischen. So heifst die Operation, durch welche die Verbindung des silberhaltigen Kupfers mit Blei bezweckt, und welche in der Regel in einem gewöhnlichen Krummofen verrichtet wird. Dem durch dieses Schmelzen erhaltenen Metallgemisch giebt man die Gestalt von Scheiben, deren Form und Gröfse nicht so gleichgültig sind, als es scheinen könnte. Nur durch die Scheibenform der Frischstücke läfst sich, ohne grofse Schwierigkeit, eine so vollständige Aussonderung des silberhaltigen Bleies durch die Saigerung bewirken, als es die Natur dieses Prozesses überhaupt zulässig macht. Aber wichtiger noch, als Gestalt und Gröfse der Frischstücken, ist das Verhältnifs des Bleies zum Kupfer. Je geringer dieses seyn kann, mit desto gröfserem Vortheil würde der Saigerhüttenprozefs, unter übrigens gleichen Umständen, ausgeübt werden, weil sich mit dem vergröfserten Verhältnifs des Bleies auch die Menge der Zwischenprodukte bei den verschiedenen Arbeiten vermehren mufs. Die möglichst reine Abscheidung des Silbers fordert dagegen die möglichste Vergröfserung des Verhältnisses des Bleies zum Kupfer, weil der Rückhalt an Silber mit dem in den Darrlingen zurückbleibenden Blei im Verhältnifs steht. Das Beschickungsverhältnifs beider Metalle würde daher, diesen beiden Rücksichten gemäfs, für jeden einzelnen Fall gewählt werden müssen, wenn nicht ein andrer Umstand hinzuträte, welcher jenes Verhältnifs noch näher bestimmte. Eine wenigstens hundertjährige Erfahrung hat nämlich gelehrt, dafs die Saigerung am besten von statten geht, wenn Kupfer und Blei in den Frischstücken in dem Verhältnifs von 3 zu 10, oder auch von 3 zu 11 vorhanden sind, und dafs bei einem bedeutend gröfseren Verhältnifs des Bleies, zu leicht ein Flüssigwerden der Frischstücken herbeigeführt, und bei einem bedeutend geringeren Verhältnifs, wegen der gleich anfänglich erforderlichen grofsen Hitze, ebenfalls eine Schmelzung der Frischstücken veranlafst werden würde. Obgleich der Erfolg in beiden Fällen, wenigstens bis zu einer gewissen Gränze beider Verhältnisse, keinen chemischen Grund hat; so bleibt es doch merkwürdig, dafs eine so alte Er-

fahrung schon das Verhältniſs von 3 zu 10 als das beste kennen gelehrt hat, indem dasselbe ziemlich genau mit den chemischen Mischungsgewichten des Kupfers und des Bleies übereinstimmt.

Von welcher Art ist aber die Verbindung, welche durch das Zusammenschmelzen von Kupfer und Blei, in dem Verhältniſs von 3 zu 10 oder zu 11 erhalten wird? So lange sie sich im geschmolzenen oder flüssigen Zustande befindet, muſs sie wegen ihrer völligen Gleichartigkeit als eine vollkommene chemische Vereinigung beider Metalle angesehen werden. Erkaltet sie schnell, wie dies im Stichheerd immer der Fall ist, indem man die Erstarrung des Frischstücks durch Begieſsen mit Wasser zu befördern sucht, so bleibt die Gleichartigkeit der Masse bei. Wird die Erstarrung, unter Zutritt der atmosphärischen Luft absichtlich verzögert, so tritt eine Ungleichartigkeit der Mischung ein, indem sich die Oberfläche bald mit einer Kupferoxydul haltenden und immer stärker werdenden Lage von Bleioxyd bedeckt, ein Erfolg, welcher später durch die Erscheinungen beim Gaarmachen seine Erklärung finden wird. Durch ein höchst langsames Erkalten der geschmolzenen Masse in bedeckten Tiegeln, scheint zwar wirklich eine weichere, bleihaltigere Verbindung, welche die untere Schicht bildet, und eine härtere, kupferhaltigere, die den oberen Theil des Regulus ausmacht, gebildet zu werden; aber das langsame Erstarren der flüssigen Masse allein, ist, bei dem Verhältniſs des Bleies zum Kupfer, wie es in den Saigerstücken statt findet, noch nicht genügend, die Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen vollständig auszubilden, weil das Verhältniſs des Bleies zu groſs ist, als daſs sich die Kohäsionskraft des nach bestimmten Mischungsgewichten strebenden Gemisches aus Kupfer und Blei, kräftig äuſsern könnte. Es scheint hier dasselbe Verhalten statt zu finden, welches das d'Arcetsche Metallgemisch aus Kupfer und Zinn befolgt.

2. Das Saigern. Was durch langsames Erstarren eines Metallgemisches, woraus das zu saigernde Frischstück zusammengesetzt ist, nur höchst unvollkommen bewirkt werden konnte, wird ungleich vollständiger erreicht, wenn das Frischstück, — wie es beim Saigern der Fall ist, — einer Glühhitze ausgesetzt wird, welche die Kupferschmelz-

hitze noch nicht erreicht. Ob die leichtflüssige Verbindung, welche sich durch die Operation des Saigerns von dem auf den Saigerscharten zurück bleibenden strengflüssigeren Metallgemisch trennt, reines Blei, oder ob sie eine, nach bestimmten und unveränderlichen Mischungsgewichten zusammengesetzte Verbindung von vielem Blei mit wenig Kupfer ist, ändert in der Erklärung der Erscheinungen welche beim Saigern vorgehen, nichts ab. Immer sehen wir in einem homogenen Metallgemisch, durch das Glühen, zwei Verbindungen sich ausbilden, von denen die eine ungleich strengflüssiger ist als die andere, so daſs sie durch diese Eigenschaft zugleich Veranlassung zur Trennung geben. Die Möglichkeit der Trennung setzt aber eine Veränderung in den Mischungsverhältnissen voraus; die A b s c h e i d u n g des Bleies, oder vielmehr des kupferhaltenden Bleies, ist also nicht das Wesentliche des Prozesses, sondern ein denselben begleitender und in den Eigenschaften der gebildeten Mischungen begründeter Erfolg desselben. Daſs er wirklich in der angegebenen Art eintritt, davon kann man sich eine genügende Ueberzeugung verschaffen, wenn man ein, aus drei Theilen Kupfer und zehn Theilen Blei bestehendes Metallgemisch, in einer eisernen Form zu einem Zain ausgieſst und schnell zur Erstarrung bringt. Das Gemisch ist vollkommen gleichartig und stellt eine chemische Verbindung beider Metalle dar. Wird dieser Zain sorgfältig in einer anhaltenden Glühhitze erhalten, welche noch nicht zureichend ist um das Gemisch zum Schmelzen zu bringen, so ist der Erfolg des Glühens höchst verschieden, je nachdem der glühende Zain plötzlich oder langsam erkaltet. Beim langsamen Abkühlen an der Luft, behält er auf der Bruchfläche dasselbe homogene Ansehen, welches er vor dem Glühen besaſs. Beim plötzlichen Erkalten (durch Ablöschen im Wasser) zeigen sich auf der Bruchfläche ganz bestimmt zwei verschiedene Metallmischungen, welche sich an der rothen und an der grauen Farbe sehr deutlich unterscheiden lassen. Die Glühhitze hatte also eine Trennung bewirkt, welche bei der langsamen Abkühlung wieder aufgehoben ward. Diese Trennung tritt folglich v o r dem Flüssigwerden der Mischung ein und sie würde sogar verhindert werden, sobald das Gemisch den Zustand der Flüssigkeit erlangt, wenn nicht durch eine besondere Vorrichtung die im flüssigen Zustande sich

trennende leichtflüssigere Verbindung, von der strengflüssigeren Metallmischung entfernt würde.

Das Resultat der Saigerung sind die sogenannten Werke, nämlich silberhaltiges Blei, welches sich im flüssigen Zustande abgeschieden hat, und die unter dem Namen des Kiehnstocks bekannte Verbindung von Kupfer und Blei, welche sich durch Glühen nicht weiter trennen läſst und im starren Zustande auf dem Saigerheerde zurück bleibt. Die Zusammensetzung der Werke und Kiehnstöcke würde daher über den Erfolg des Saigerprozesses Aufschluſs geben müssen. Von den bei einer und derselben Saigerung niedergeschmolzenen Werken wurden in sieben verschiedenen Perioden, nämlich zu Anfange und zu Ende des Prozesses, und auſserdem etwa von dreiſsig zu dreiſsig Minuten, mit groſser Sorgfalt Schöpfproben genommen, in denen ein ziemlich gleich bleibendes Verhältniſs des Kupfers zum Blei gefunden ward ([1]). Dies Verhältniſs würde am mehrsten mit einer Verbindung aus zwölf Mischunsgewichten Blei und einem Mischungsgewicht Kupfer übereinstimmen, einer Verbindung, deren Vorhandenseyn gerade nicht sehr groſse Wahrscheinlichkeit für sich hat und daher aus dem Erfolg dieser Untersuchungen nicht mit Zuverlässigkeit angenommen werden darf. Auch der Silbergehalt der Werke zeigte keine bedeutende Verschiedenheit ([2]). Beide Erfolge beweisen aber wenigstens, daſs die Scheidung der Metallgemische bei der Saigerung, vom Anfange bis zu Ende derselben, nach einem

(1) Die Zusammensetzung der Werke geht aus folgender Zusammenstellung hervor, in welcher No. 1 die zu Anfange, und No. 7 die zu Ende der Saigerung gefallenen Werke bezeichnen

	No. 1.	No. 2.	No. 3.	No. 4.	No. 5.	No. 6.	No. 7.
Blei......	97, 8	97, 9	97, 3	97, 6	97, 1	97, 5	97, 3.
Kupfer...	2, 2	2, 1	2, 7	2, 3	2, 8	2, 5	2, 7.

(2) Der Silbergehalt (nach Lothen in 200 Pf. Werken) war folgender:

No. 1.	No. 2.	No. 3.	No. 4.	No. 5.	No. 6.	No. 7.
10, 5	10, 5	10, 75	10, 75	10, 75	10, 8	10, 8.

und demselben Gesetz statt findet, und dafs schwerlich eine mechanisch wirkende Kraft diese Scheidung hervorbringt.

Die Zusammensetzung der Kiehnstöcke sollte freilich, wenn die Saigerung vollständig erfolgt ist, von der Art seyn, dafs sich daraus das bestimmte Mischungsverhältnifs, nach welchem beide Metalle bei der Saigerung streben, erkennen liefse. Es leuchtet aber ein, dafs es schwerlich gelingen kann, dies Mischungsverhältnifs mit völliger Zuverlässigkeit aufzufinden, weil der Saigerprozefs in jedem Augenblick unterbrochen werden kann und weil diese Unterbrechung in der Ausübung wirklich statt findet, indem die Trennung der letzten Antheile Werke eine sehr grofse Hitze erfordert, bei welcher man den ganzen Kiehnstock in Fluss zu bringen, und die Werke durch einen zu grofsen Kupfergehalt zu verunreinigen fürchtet. Dies ist der Grund warum in den von mir untersuchten Kiehnstöcken, der Kupfergehalt von 67, 1 bis 75, 4 und der Bleigehalt von 32, 9 bis 24, 6 differirend gefunden ward. Dafs sich bei so abweichenden Verhältnissen kein bestimmtes Mischungsverhältnifs durch Vergleichung der Analysen ausmitteln läfst, bedarf keiner Erwähnung; aber es ist klar, dafs sich der Kiehnstock dem gesuchten bestimmten Mischungsverhältnifs am mehrsten nähert, in welchem das Verhältnifs des Bleies das kleinste ist. Wäre es erlaubt, auf einer Vermuthung eine zweite zu begründen, so würde man die wahre Zusammensetzung eines ganz vollkommen abgesaigerten Kiehnstocks aus zwölf Mischungsgewichten Kupfer und einem Mischungsgewicht Blei anzunehmen haben. Ein so zusammengesetzter Kiehnstock müfste 21, 43 Prozent Blei enthalten, so dafs sich das Frischstück bei der Saigerung in zwei Verbindungen zerlegte, von denen die eine aus 12 M. G. Blei und 1 M. G. Kupfer, und die zweite aus 12 M. G. Kupfer und 1 M. G. Blei bestände. Ein solcher Erfolg würde zugleich einen schönen Aufschlufs darüber geben, warum nach uralter Erfahrung, die Saigerung am besten von statten geht, wenn die Frischstücken aus 1 M. G. Blei und 1 M. G. Kupfer zusammengesetzt sind.

Wenn die abgesaigerten Kiehnstöcke im glühenden Zustande mit Wasser begossen werden, lassen sie, bei einem gewissen Grade der Temperatur, aber nicht wenn sie noch zu heifs oder schon zu kalt sind, aber-

mals Werke fallen, so dafs es scheint als ob die Saigerung von Neuem wieder beginnen wollte. Diese Erscheinung ist ganz dazu geeignet, über den Vorgang beim Saigerprozefs mehr Licht zu verbreiten. In der zu grofsen Hitze hat sich nämlich eine allgemeine Verbindung von Kupfer und Blei gebildet, welche durch das plötzliche Ablöschen mit Wasser zum Erstarren gebracht wird. Durch die allmälige Abnahme der Temperatur konnten sich die bestimmten Verbindungen schon wieder ausbilden, und wenn der Kiehnstock in diesem Zustande mit Wasser begossen wird, mufste die leichtflüssigere Verbindung, beim plötzlichen Zusammenziehen der erkaltenden strengflüssigeren Mischung, mechanisch ausgeprefst werden; eine Wirkung die man deutlich eintreten sieht, wenn man den Vorgang genau beobachtet, indem die Bleikörner recht eigentlich tropfenweise ausschwitzen. Warum dies Ausschwitzen von Werken nicht statt findet, wenn der Kiehnstock schon zu sehr abgekühlt ist, bedarf der Erklärung nicht; wohl aber mufs es bemerkt werden, dafs ein solcher Kiehnstock beim neuen Glühen abermals wieder Werke fallen läfst, welche sich beim langsamen Abkühlen gebildet hatten und durch die allmälig erfolgte Erstarrung nicht ausgeprefst wurden, sondern sich gleichförmig in der ganzen Masse des Kiehnstocks verbreiteten. Die Werke welche beim Begiefsen der glühenden Kiehnstöcke mit Wasser ausgeprefst werden, enthalten 2, 9 Prozent Kupfer und sind also etwas kupferhaltiger als die reinen Saigerwerke; indefs kann dieser unbedeutend gröfsere Gehalt auch zufällig seyn. Dies ist um so wahrscheinlicher, als in den Werken, welche beim abermaligen Erhitzen der abgesaigerten Kiehnstöcke erhalten werden, bei der Untersuchung ebenfalls nur ein Kupfergehalt von 2, 39 Prozent gefunden ward.

Diese Erscheinungen geben aber auch zugleich darüber einen Aufschlufs, warum es nicht möglich ist, die Frischstücke vollständig zu saigern, d. h. zu dem bestimmten Mischungsverhältnifs des Kupfers und Bleies in den Kiehnstöcken zurückzuführen. Die letzten Antheile der leichtflüssigen Mischung erfordern nämlich, zur völligen Trennung, schon eine starke Hitze, weil sie von einer grofsen Menge der strengflüssigen Mischung umgeben sind. Deshalb wird eine zu schwache Hitze keine

Absaigerung mehr bewirken. Wird die Hitze aber zu sehr verstärkt, so werden die Verbindungen nach bestimmten Mischungsverhältnissen wieder zerstört und es wird dann die Saigerung aus chemischen Gründen unmöglich.

3. Das Darren. Läſst sich gleich die Gränze nicht genau bestimmen, bis zu welcher die Ausscheidung des Bleies aus dem Frischstück durch das Saigern noch möglich ist, und beruht es gleich nur auf Vermuthung, daſs die Entbleiung durch die vollständigste Saigerung nur bis zu einem Bleigehalt des Kiehnstocks von 21, 43 Prozent gebracht werden kann; so ist doch so viel gewiſs, daſs eine solche Gränze vorhanden ist und daſs der ganze Prozeſs des Saigerns schon unter dieser Gränze durch zu starke Temperaturerhöhung, welche die Schmelzhitze des Kupfers noch nicht erreicht, gänzlich unterbrochen wird. Wahrscheinlich ist es eine Folge der gegen das Ende der Saigerarbeit zu sehr verstärkten Hitze, daſs die am besten abgesaigerten Kiehnstöcke noch einen Bleigehalt von 24 bis 28 Prozent behalten und dadurch zu einer noch gröſseren Unvollkommenheit des Scheidungsverfahrens, als die Natur desselben schon ohnedies mit sich bringt, Veranlassung geben. Um einen so groſsen Gehalt an Blei, und in demselben Verhältniſs auch an Silber, nicht zu verlieren, werden die Kiehnstöcke zum Darren abgegeben. So nothwendig es war, die Frischstücken beim Saigern mit Kohle zu umgeben und den Zutritt der unzerlegten atmosphärischen Luft möglichst abzuhalten; eben so nothwendig ist es, den Kiehnstöcken beim Darren jedes Reduktionsmittel zu entziehen und die Erhitzung durch Flammenfeuer und mit Luftzutritt zu bewirken. Im Darrofen werden die Kiehnstöcke einer ungleich gröſseren Hitze, als auf den Saigerheerden gegen das Ende der Saigerarbeit, ausgesetzt. Nur zu Anfange der Darrarbeit darf das Feuer nicht zu stark seyn, weil die Kiehnstöcke wie vorhin erwähnt, noch Werke fallen lassen, die sich beim Erkalten auf den Saigerscharten in der Masse des Kiehnstocks ausgebildet hatten. Eine zu schnell gesteigerte Hitze im Darrofen würde durch das Zurückführen zu einer allgemeinen Verbindung, das Schmelzen des Kiehnstocks bewirken. Erst wenn keine Werke mehr niedertropfen, sondern wenn, statt des regulinischen Metalles, ein verkalktes

Metallgemisch, welches den Namen Darrost erhalten hat, in den Darrgassen häufiger zum Vorschein kommt, kann die Hitze ohne Nachtheil verstärkt werden. Gewöhnlich zeigt sich erst in fünf bis sechs Stunden nach dem erfolgten Anstecken des Ofens, der erste Darrost. Dies oxydirte Metallgemisch fliefst, bei starker Hitze und unter geöffneten Zügen in dem Gewölbe des Ofens, neun bis zehn Stunden lang ununterbrochen in den Darrgassen nieder. Dann tritt ein Zeitpunkt ein, wo es sparsamer zum Vorschein kommt. Die Zugöffnungen werden alsdann geschlossen, wodurch die Hitze im Ofen wegen der Verminderung des Luftzuges geschwächt wird, obgleich mit der Feurung in den Darrgassen ununterbrochen fortgefahren werden mufs. In diesem Zustande des gedämpften Zuges wird der Ofen drei bis vier Stunden lang erhalten. Während dieses Zeitraums tropft der Darrost weniger häufig in den Gassen nieder. Sobald er in gröfserer Menge zum Vorschein kommt, werden die Luftzüge im Gewölbe wieder geöffnet, wodurch die Hitze verstärkt und das Abfliefsen des Darrostes befördert wird. Nach Verlauf von sechs bis acht Stunden nach wieder geöffneten Zügen, pflegt keine Absonderung des Darrostes mehr statt zu finden, weshalb die abgedarrten Kiehnstöcke, oder die Darrlinge, noch glühend ausgebrochen und in einen mit Wasser angefüllten Sumpf geworfen werden, um durch das plötzliche Ablöschen, die Ablösung des fast im verglasten Zustande sich befindenden Kupferoxyds (Pickschiefers) von der Oberfläche des Darrlings zu erleichtern.

Die Produkte des Darrens, welche Aufschlufs über den Vorgang bei diesem Prozefs geben sollen, sind also Darrlinge, Darrost und Pickschiefer. Die verschiedenen Darrlinge welche ich untersucht habe, zeigten einen abweichenden Gehalt an Kupfer von 82, 7 bis 90, 6 und an Blei von 17, 3 bis 9, 4 Prozent. Der Darrling ist also keine bestimmte chemische Verbindung von Kupfer und Blei, sondern es hängt von der gröfseren oder geringeren Vollkommenheit ab, womit der Darrprozefs ausgeübt wird, ob sich das Blei mehr oder weniger vollständig ausscheidet.

Der Pickschiefer ist ein mechanisches Gemenge von regulinischem Kupfer, welches beim Ablösen vom Darrling als eine feine Schaale

am Pickschiefer hängen bleibt, ferner von Kupferoxyd, von Kupferoxydul und von Bleioxyd. Das Kupferoxyd ist der überwiegendste Gemengtheil und beträgt 60 bis 70 Prozent. Ganz reiner Pickschiefer, welcher beim Ablöschen des Darrlings im Wasser von selbst abfällt, besteht fast ganz aus Kupferoxyd.

Die Zusammensetzung des Darrostes nähert sich im Allgemeinen der eines Silikats, dessen Basen Bleioxyd und Kupferoxydul, nebst etwas Thonerde und Eisenoxydul sind. Er würde eine Verbindung von Bleioxyd mit Kupferoxydul seyn, wenn das in den Darrgassen herabschmelzende oxydirte Metallgemisch, nicht den Lehm oder Thon, woraus die Ofensohle und Bänke aufgeführt werden, auflösete. Von der veränderlichen Beschaffenheit dieses Materials wird also auch die Verunreinigung der Metalloxyde im Darrost abhängig seyn.

Um einen vollständigen Aufschlufs über den Vorgang beim Darrprozefs zu erhalten, mufste nothwendig ausgemittelt werden, wie sich Kupfer und Bleioxyd, so wie Kupferoxyd und Blei, in verschlossenen Thontiegeln, ohne Zutritt von Kohle, beim Zusammenschmelzen verhalten würden. Die Versuche welche ich bei sehr abgeänderten Verhältnissen des Kupfers zum Bleioxyd, so wie des Kupferoxyds zum Blei angestellt habe, gaben mir das Resultat, dafs Blei und Kupferoxyd, so wie Bleioxyd und Kupfer sich nach einerlei Gesetz beim Zusammenschmelzen verhalten, dafs sie sich nämlich wechselseitig in der Art zersetzen, dafs in dem entstehenden oxydirten Gemisch, das Blei sechsmal so viel Sauerstoff als das Kupfer enthält und dafs diesem Gesetz gemäfs die Reduktion des Kupferoxyds oder des Bleioxyds theilweise erfolgen mufs.

Zur Untersuchung des Darrostes sind Proben angewendet worden, welche im Verlauf eines ganzen Darrprozesses, vom Anfange bis zu Ende desselben gesammelt wurden. Weil sich drei Hauptperioden des Prozesses annehmen lassen, nämlich das Darren in den ersten acht bis zehn Stunden bei geöffneten Zügen des Ofens, das Darren in den folgenden drei bis vier Stunden bei gedämpften Zügen, und das Darren in den letzten sechs bis acht Stunden, bei wieder geöffneten Zügen, so wurden auch die Darrostproben von diesen drei Stadien besonders

genommen, und zwar bei einem jeden vom Anfange bis zu Ende desselben [1]. Diese Analysen zeigen, daſs das Bleioxyd den gröſsten Bestandtheil des Darrostes ausmacht, daſs dasselbe in dem Darrost, welcher bei geschlossenen Zügen des Ofens erhalten wird, in der gröſsten Menge vorhanden ist und das sich der Bleioxydgehalt in dem Darrost vom Anfange bis zu Ende des ersten Stadii, fast in demselben Verhältniſs vermindert, wie in dem Darrost vom Anfange bis zu Ende des letzten Stadii. Der Gehalt an Kupferoxydul steht dabei weder im graden noch im umgekehrten Verhältniſs mit dem Bleioxydgehalt.

Nach diesen Erfahrungen muſs der Erfolg bei der Darrarbeit darin bestehen, daſs sich der Darrost durch die Einwirkung des regulinischen Bleies auf das Kupferoxyd bildet, womit sich die Oberfläche der Kiehn-

---

(1) Darrost von dem ersten Stadio, bei geöffneten Zügen

	No. 1.	No. 2.	No. 3.
Bleioxyd	84,2	78,5	76,50
Kupferoxydul	4,1	7,9	7,88
Eisenoxydul	0,4	0,5	0,50
Thonerde	1,1	1,7	1,60
Kieselerde	10,2	11,4	13,30

Darrost vom zweiten Stadio, bei geschlossenen Zügen

	No. 1.	No. 2.
Bleioxyd	79,8	85,1
Kupferoxydul	5,1	4,1
Eisenoxydul	0,4	0,3
Thonerde	1,2	1,0
Kieselerde	13,5	9,5

Darrost vom dritten Stadio, bei wieder geöffneten Zügen

	No. 1.	No. 2.	No. 3.
Bleioxyd	81,2	78,9	77,1
Kupferoxydul	4,3	6,3	7,6
Eisenoxydul	0,3	0,5	0,3
Thonerde	1,2	1,8	1,8
Kieselerde	13,0	12,5	13,2

stöcke in der starken Glühhitze überzieht. Ein bestimmtes Mischungsverhältnifs der oxydirten Masse kann aber deshalb nicht hervorgebracht werden, weil die hinzuströmende atmosphärische Luft das oxydablere Metall, — das Blei, — wenn es im Uebermaafs vorhanden ist, auch vorzugsweise oxydiren wird. Das durch die Einwirkung des Bleies auf das Kupferoxyd sich bildende Metallgemisch, wird, in dem Augenblick des Entstehens, durch den Sauerstoff der Atmosphäre und in vielen Fällen auch zugleich durch die im Uebermaafs vorhandene, durch die Oxydirung des Bleies sich bildende Glätte, wieder zerstört und hilft den Darrost mit bilden. Das Kupferoxyd, welches sich durch das Blei in Oxydul und in regulinisches Kupfer umändert, ist wirklich vorhanden, wie die Zusammensetzung des Pickschiefers zeigt, der die Oberfläche des Darrlings bekleidet. Der ganze Prozefs geht also auf der Oberfläche der Kiehnstöcke vor und es bleibt nur zu erklären, woher das Blei kommt, welches alle diese Erscheinungen veranlafst.

Ein vollständig abgesaigerter Kiehnstock stellt eine chemische Verbindung des Kupfers mit Blei, nach bestimmten und unabänderlichen Mischungsgewichten dar, welcher durch Glühen kein Blei mehr entzogen werden kann. Beim Darren erfolgt also die Verminderung des Bleigehaltes des Kiehnstocks offenbar nur dadurch, dafs sich das Blei nach und nach an die Oberfläche des Kiehnstocks begiebt, und dort theils durch das Kupferoxyd, welches sich auf der Oberfläche des glühenden Kiehnstocks gebildet hatte, theils durch die atmosphärische Luft oxydirt, und in Verbindung mit Kupferoxydul als Darrost abgeschieden wird. Es erfolgt hier also die Entmischung einer chemischen Verbindung, und sogar einer chemischen Verbindung nach bestimmten Mischungsverhältnissen, ungeachtet sich diese Verbindung nicht im flüssigen Zustande befindet. Dieser Erfolg läfst sich auf keine andere Weise erklären, als durch das Bestreben des Bleies, sich mit der ganzen Masse des Kupfers in der starken Glühhitze wieder in ein Gleichgewicht zu setzen, sobald dasselbe, durch die Einwirkung einer kräftiger wirkenden Potenz, als es die Verwandstchaftskraft des Kupfers zum Blei ist, auf irgend einem Punkte gestört wird. Die Wirkung des Sauerstoff, unterstützt durch die Glühhitze, ist stark genug, die nach bestimmten Mischungsgewich-

ten zusammengesetzte Verbindung des Kupfers mit Blei, auf der Oberfläche des Kiehnstocks aufzuheben. Diese Aufhebung zerstört aber das Gleichgewicht in der ganzen Masse, weshalb das Blei dasselbe in der glühenden Verbindung immer wieder herzustellen strebt und auf der Oberfläche des Kiehnstocks stets wieder abgeschieden wird, so daſs der Erfolg die Verminderung des Bleigehalts des Kiehnstocks seyn muſs.

Der Prozeſs des Darrens giebt ein überzeugendes und lehrreiches Beispiel von Entmischungen, welche in einer gewissen Temperatur ohne einen flüssigen Zustand der Mischung statt finden können, so wie ferner von Verbindungen, welche sich in allen Verhältnissen, selbst in einer nach bestimmten Mischungsgewichten zusammengesezten Mischung, unter gewissen Umständen ausbilden. Betrachtet man genauer die Zusammensetzung des Darrostes in den verschiedenen Stadien des Darrprozesses, so ergiebt sich eine merkwürdige Uebereinstimmung zwischen dem Darrost vom ersten und vom dritten Stadio. Erwägt man, daſs der Darrost zu Ende des ersten Stadii immer reicher an Kupferoxydul ward, daſs er schon sparsamer niedertropfte und fast ganz zu flieſsen aufhörte; daſs im zweiten Stadio verhältniſsmäſsig nur wenig, aber an Bleioxyd reicherer Darrost erfolgte und daſs im dritten Stadio wieder ein starkes Niederflieſsen von Darrost, von derselben Zusammensetzung wie der vom ersten Stadio statt fand, so muſs man die Ursachen dieses Erfolges darin suchen, daſs sich das Blei aus der Mitte des Kiehnstocks nicht so schnell nach der Oberfläche begeben, oder sich vielmehr nicht so schnell gleichmäſsig in der ganzen Masse des Kupfers vertheilen konnte, um immer Darrost von gleicher Zusammensetzung zu bilden. Das mittlere Stadium des Darrprozesses hat also vorzüglich den Zweck der gleichmäſsigen Vertheilung des zurück gebliebenen Bleies in der ganzen Masse des Kiehnstocks, und dient zur Vorbereitung für das dritte Stadium.

Man sollte vermuthen, daſs der Silbergehalt des Bleies nicht mit in den Darrost übergehen, sondern daſs das oxydirte Silber bei der Einwirkung des Bleioxyds auf das Kupfer regulinisch wieder hergestellt würde. Die Erfahrung bestätigt diese Vermuthung nicht, indem der Pickschiefer fast zu den silberärmsten Abgängen gehört, welche bei dem ganzen Saigerhüttenprozeſs vorkommen. Es liegt darin ein neuer Be-

weis, dafs das Silber, bei dem ganzen Prozefs des Saigerns dem Blei folgt und dafs die Verwandtschaft des Kupfers zum Silber im Vergleich zu der des Bleies zum Silber sehr unbedeutend ist.

4. Das Gaarmachen. Diese Operation hat den Zweck, das Kupfer von dem in den Darrlingen zurück gebliebenen Blei zu befreien. Sie wird dadurch verrichtet, dafs man die Darrlinge in einer Heerdgrube vor dem Gebläse einschmelzt und nach dem erfolgten Einschmelzen das Gebläse auf die flüssige Masse wirken läfst. Der Vorgang bei diesem Prozefs würde sich schwer erklären lassen, wenn nicht die Erscheinungen beim Darren darüber einen vollständigen Aufschlufs gegeben hätten. Das Gaarmachen ist in der That ein vollkommneres Darren, indem die Flüssigkeit der Masse die schnellere Wiederherstellung des Gleichgewichts zwischen dem Blei und Kupfer befördert. Wie beim Darren der ganze Entmischungsprozefs auf der Oberfläche des Kiehnstocks vor sich ging, so findet er beim Gaarmachen auf der Oberfläche der geschmolzenen Masse statt. Diese bedeckt sich mit Schlacke, welche man durch Abziehen, oder durch ein freies Ablaufenlassen entfernt. Die Analyse der Gaarschlacken zeigt, dafs sich das Verhältnifs des Kupferoxyduls zum Bleioxyd in allen Perioden der Arbeit verändert und zu Anfange des Gaarmachens am kleinsten, zu Ende des Prozesses aber am gröfsten ist ([1]). Die Gaarschlacke nähert sich übrigens in ihrer Zusammensetzung einem Bisilikat.

Das Uebereinstimmende des Vorganges beim Gaarmachen mit dem Erfolge beim Darren, liegt am Tage. Nur darin findet eine merkwür-

---

(1) No. 1. ist die Schlacke gleich vom Anfange der Arbeit; No. 2. und 3. sind von zwei mittleren Perioden und No. 4. ist nach dem Zuschützen des Gebläses, also nachdem das Kupfer für gaar erkannt war, genommen.

	No. 1.	No. 2.	No. 3.	No. 4.
Bleioxyd	67,4	62,1	54,8	51,7
Kupferoxydul	6,2	10,4	19,2	19,8
Eisenoxydul	1,0	1,1	1,2	1,2
Thonerde	3.1	3,4	3,4	3,4
Kieselerde	22,3	22,9	21,4	23,9

dige Verschiedenheit statt, dafs die Gaarschlacke im Vergleich mit dem Darrost sehr wenig Silber enthält. Die Reduktion des mit dem Bleioxyd verbundenen Silberoxyds, welche in der Darrofenhitze nicht geschehen konnte, mufs also in der Schmelzhitze des Kupfers bewirkt, vielleicht auch dadurch veranlafst werden, dafs das oxydirte Gemisch länger auf der Oberfläche der metallischen Verbindung verweilt. Der Silbergehalt der Darrlinge ist also gröfstentheils als verloren zu betrachten, weil er in das Gaarkupfer mit übergeht, woraus die Nothwendigkeit eines möglichst vollständigen Abdarrens der Kiehnstöcke zur Verminderung des Silberrückhalts in den Gaarkupfern hervorgeht.

5. Das Treiben. Die Scheidung des Silbers vom Blei in den sogenannten Werken, geschieht bekanntlich auf die Weise, dafs die Werke geschmolzen und durch die Wirkung eines Gebläses auf die Oberfläche der geschmolzenen Masse, oxydirt werden, wobei das entstehende Oxyd stets entfernt wird, bis es sich endlich nicht mehr bildet und der Silbergehalt der Werke rein zurück bleibt.

Man wird sogleich die auffallende Uebereinstimmung des Gesetzes warnehmen, worauf die Treibarbeit und das Gaarmachen beruhen. Hier beabsichtigt man die Scheidung des Bleies vom Kupfer, dort die des Bleies vom Silber. Hier wie dort findet der Prozefs der Oxydation auf der Oberfläche der flüssigen Masse statt, und in beiden Fällen wird das Mischungsverhältnifs beider Metalle in jedem Augenblick in der ganzen Masse zerstört und wieder hergestellt. Weil aber das Silber ungleich weniger oxydabel ist wie das Kupfer, so geht auch bei der Treibarbeit ungleich weniger Silberoxyd in die Schlacke (Glätte) als beim Gaarmachen Kupferoxydul in die Gaarschlacke geführt wird.

Deutlicher lassen sich die Erfolge bei der Treibarbeit und das Verhalten, welches die Metallmischung dabei befolgt, dann warnehmen, wenn das Verhältnifs des Silbers zum Blei sehr grofs ist, oder wenn dem Silber die letzten Antheile Blei entzogen werden sollen, wie es beim Feinbrennen des Silbers geschieht. Das Blei oxydirt sich auf der Oberfläche des flüssigen Silbers, zieht als Glätte in die Heerdmasse und stellt in der ganzen Metallmischung immer wieder ein gleiches, sich stets verminderndes Mischungsverhältnifs dar. Befindet sich glühende

Kohle auf der Oberfläche des flüssigen Metalles, so wird, auch bei der Einwirkung der Gebläseluft, die Abscheidung des Bleies unmöglich, oder das Silber läfst sich alsdann nicht feinbrennen, weil keine Oxydation auf der Oberfläche der Masse vorgehen kann.

Die verschiedenen, bei der Saigerarbeit vorkommenden metallurgischen Prozesse geben daher sehr interessante, und, wie es scheint, bisher nicht beachtete, wenigstens in ihren Gründen nicht gehörig erkannte Beispiele, von der Art und Weise, wie Mischungen und Entmischungen in der erhöheten Temperatur unter gewissen Umständen erfolgen. Es leuchtet aus dem Vorgetragenen aber auch ein, wie unrichtig die gewöhnliche Ansicht ist, die Operation des Darrens als eine Fortsetzung des Saigerprozesses zu betrachten. Beim Saigern soll eine chemische Verbindung nach unbestimmten Mischungsverhältnissen, durch das Glühen, zu Verbindungen nach bestimmten Mischungsgewichten zurück geführt; beim Darren hingegen soll eine chemische Verbindung nach bestimmten Mischungsverhältnissen, durch Glühen, unter Zutritt der atmosphärischen Luft, mehr oder weniger vollständig entmischt werden.



Versuche und Beobachtungen
über
den Einfluſs der Düngungsmittel, auf die Erzeugung der nähern Bestandtheile der Getreidearten.

Von

Hrn. SIGISM. FRIEDR. HERMBSTÄDT.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 22. Juli 1824.]

Einleitung.

Die Pflanzen sind, gleich den Thieren, organische belebte Geschöpfe; sie müssen daher auch in den Funktionen, welche von ihrer Lebensthätigkeit abhangen, mit den Thieren mehr oder weniger übereinkommen. Gleich den Thieren sind die Pflanzen mit eigenen, unter sich selbst verschiedenen Organen begabt; und diese sind dazu bestimmt, diejenigen Verrichtungen derselben, im lebenden Zustande, auszuüben, ohne welche ihre Gesundheit, ihr Gedeihen, ihre Massenerweiterung und ihre Fruchtbarkeit nicht möglich seyn könnte.

Der Keim zur künftigen Pflanze ist im befruchteten Samenkorn derselben gegeben. Pflanzen, welche nicht des Samenkorns zu ihrer Vervielfältigung bedürfen, sondern durch Blätter und Stecklinge fortgepflanzt werden können, wie die Cactusarten, die Stapelien u. s. w., ja selbst mehrere Stauden-, Strauch- und Baumgewächse, scheinen einen polypenartigen Karakter zu besitzen.

Bei denjenigen Pflanzen, welche nur allein aus Samen fortgepflanzt werden können, bedarf das Samenkorn derselben reizender Potenzen zur Belebung und Entwickelung des schlafenden Keims, wenn er zur Pflanze ausgebildet werden soll. Ist aber die Belebung und erste Entwickelung

des Keims erfolgt: dann bedarf derselbe die ihm angemessenen Nahrungsmittel zur fernern Ausbildung und Gestaltung der einzelnen Organe, die den Habitus der Pflanze begründen.

Das Samenkorn der Pflanzen zeigt eine grofse Uebereinstimmung mit dem Ei eines Vogels. Im Ei des Vogels bemerkt man, von Aufsen nach Innen betrachtet: 1. die harte aber poröse Schale; 2. das Eiweifs, welches durch eine dünne Haut von der äufsern Schale getrennet ist; 3. den Eidotter, wieder mit einer dünnen Haut umgeben; 4. den Keimpunkt in dem Dotter eingeschlossen, aus welchem das werdende Geschöpf sich gestaltet.

Beim Ei des Vogels sind: 1. vorausgegangene Befruchtung desselben; 2. eine Temperatur von 28 bis 30 Grad Reaumür; 3. Einwirkung der atmosphärischen Luft, unerläfsliche Potenzen, ohne welche die belebende Entwickelung und körperliche Ausbildung des Embryo nicht erfolgen kann.

Bringt man ein befruchtetes frisches Hühner-Ei in einem Gefäfse mit ausgekochtem destillirten Wasser übergossen, und mit einem zweiten Gefäfs überstürzt, unter die Glocke einer Luftpumpe, so wird, nach dem Mafse der Verdünnung der äufsern atmosphärischen Luft, eine bedeutende Menge gasförmiger Flüssigkeit aus den unsichtbaren Poren der Eierschale entwickelt.

Bringt man das seiner Luft beraubte Ei auf den vorigen Zustand der Trockenheit, so erscheint solches bedeutend im Gewicht vermehrt: der Raum der ausgetretenen Luft ist also durch eingedrungenes Wasser ersetzt worden.

Wird ein solches der eingeschlossenen Luft beraubtes Ei einem brütenden Huhn untergelegt, so wird das Embryo zwar entwickelt; es tritt aber nicht in das wirkliche Leben, kann also auch nicht ausgebrütet werden.

Die auf jenem Wege aus dem Ei entnommene Luft zeigt, durch die eudiometrische Prüfung, mittelst dem Voltaschen Eudiometer, nur sechs Procent Sauerstoffgas; das übrige ist Stickstoffgas mit einer unbedeutenden Menge kohlenstoffsaurem Gas gemengt.

Eier, die aufserhalb mit einem Firnifs überzogen und dadurch der von aufsen einwirkenden Luft beraubt worden sind, können nicht aus-

gebrütet werden; wie unser verehrter College Erman bereits vor mehreren Jahren bewiesen und ich durch vielfältige Versuche bestätigt gefunden habe.

Das Embryo im Ei wird auf solche Weise zwar entwickelt, tritt aber nicht in die lebende Ausbildung. Wärme allein ist also zur belebten Entwicklung des Embryo nicht hinreichend; sondern das Leben bedarf einer Mitwirkung der Luft von Aufsen nach Innen. Dafs die Respiration des Geschöpfes, innerhalb dem Ei, hierdurch begründet wird, ist wohl keinem Zweifel unterworfen.

Untersucht man Hühnereier, in verschiedenen Zeiträumen, während dem Bebrüten derselben: so siehet man den Dotter sich immer mehr vermindern, während das Eiweifs in eine dem Blute analoge rothe Flüssigkeit umgewandelt wird.

Der Dotter vermindert sich in dem Mafse, als die Ausbildung des jungen Geschöpfes im Ei vorschreitet. Zwei Tage vor seinem Durchbrechen durch die Schale, ist von dem Dotter nichts mehr zu bemerken. Der Dotter scheint also die erste Nahrung darzubieten, die dem Embryo, nach dem Eintritt ins bewegliche Leben, auf einem nicht weiter bekannten Wege, zugeführt wird; bis selbiges Kraft und Selbstthätigkeit genug bekommt, die äufsere harte Schale des Eies zu durchbrechen, um in das freie Leben eintreten zu können.

Die gröfste Aehnlichkeit mit den Eiern der Vögel, besitzen die Samenkörner der so genannten Oelpflanzen. Bei diesen findet sich jedes einzelne Samenkorn, von Aufsen nach Innen zu untersucht, bestehend aus: 1. einer mehr oder weniger harten porösen Schale; 2. einer unter derselben liegenden, dem geronnenen Eiweifs ähnlichen, zum Theil mit Oel durchdrungenen hautartigen Substanz; 3. im Mittelpunkte des Samenkorns, einer mit wenigem geronnen Pflanzen-Eiweifs gemengten Fettigkeit, in der 4. der Keimpunkt eingehüllet ist. Alle diese Materien sind mit einem leicht säuerbaren Schleim durchdrungen.

Statt dafs die Schale der Vogeleier eine Verbindnng von kohlenstoffsaurem und von phosphorsaurem Kalk, mit verhärtetem Eiweifs ausmacht, ist die äufsere Schale der Pflanzensamen mit Harz

und ätherischem Oel durchdrungen, welche Materien einen Schutz vor äufsern zerstörenden Einwirkungen gewähren.

Weniger Aehnlichkeit mit den Eiern der Vögel besitzen die Samenkörner der Getreidearten und der Hülsenfrüchte. Bei diesen findet sich, unter der äufsern mit vielem Schleim durchdrungenen Schale, der innere Kern, aus einem Gemenge von Amylon, von Kleber (*Triticin*) und Eiweifs gebildet. Der abgesondert darin vorhanden liegende Keimpunkt, enthält ein daraus scheidbares fettes Oel. Das Ganze, besonders die Schale und der mehlreiche Kern, sind mit Phosphorsäure und phosphorsaurem Kalk mehr oder weniger durchdrungen.

Bringt man frische gesunde Samenkörner in destillirtes Wasser, so dafs sie vollkommen damit bedeckt und von der äufsern einwirkenden Luft abgeschnitten sind: so quellen sie auf, der Keim wird entwickelt, aber er stirbt bald ab, und das Ganze geht in wenig Tagen in eine stinkende Jauche über.

Ist das Samenkorn hingegen nur so weit mit Wasser in Berührung gebracht, dafs drei Viertheile desselben über dem Wasser hervorstehen, also mit der äufsern Luft Gemeinschaft haben: so wird das Wasser sehr bald eingesaugt, der Keim entwickelt sich nach oben, die Wurzel nach unten, die junge Pflanze wächst empor; sie bildet endlich Zweige und Blätter, kommt selbst zur Blüthe; aber sie wird nie fruchtbringend.

So wie die junge Pflanze sich mehr ausbildet, bedarf sie eine Zeitlang blofs des Wassers und der Luft, um fort zu wachsen; aber der Wachsthum läfst nach, wenn, unter einer gläsernen Glocke eingeschlossen, das Sauerstoffgas der darin enthaltenen atmosphärischen Luft absorbirt worden ist.

Wird jene Operation im reinen Stickstoffgas, unter einer gläsernen Glocke eingeschlossen, veranstaltet, so kommt der entwickelte Keim nicht zur Ausbildung. Wird die Operation in atmosphärischer Luft veranstaltet, so bleibt ihr Gehalt an Stickstoffgas unverändert; das Sauerstoffgas verschwindet dagegen ganz, es wird kohlenstoffsaures Gas erzeugt, dessen Volum genau eben so viel beträgt, als das des verloren gegangenen Sauerstoffgases.

Es ist also keinem Zweifel unterworfen, dafs der Sauerstoff der atmosphärischen Luft hier als eine Potenz für die Belebung, die Entwickelung und die fernere Ausbildung des Keims zur Pflanze, eine wichtige Rolle gespielt hat.

Da aber in trockner Luft allein keine Entwickelung des Keims möglich ist; da hiezu die Mitwirkung des Wassers erfordert wird; da er ferner auch, ohne Mitwirkung der Luft, blofs unter reinem Wasser, zwar entwickelt wird, von nun an aber, ohne Mitwirkung der Luft, sich nicht ferner zur Pflanze ausbilden kann; so folget hieraus: 1. dafs anfangs ein Theil des vom Samenkorn eingesaugten Wassers zerlegt wird; 2. dafs der Sauerstoff desselben den zureichenden Grund von der erstern belebten Entwickelung des Keims enthält. Ist aber der Keim einmal belebt und entwickelt, dann bedarf er der Mitwirkung des Sauerstoffes also der Atmosphäre; und nun erst erfolgt ein Prozefs der Respiration, der Sauerstoff wird eingesaugt und als kohlenstoffsaures Gas exspirirt; dagegen eine Exhalation von reinem Sauerstoffgas, wie bei Pflanzen die in der Erde wachsen, hier noch nicht statt findet.

Alles dieses giebt einen Beweis, dafs so wie das belebte und entwickelte Geschöpf aus dem Keim im Ei des Vogels, anfangs unter Mitwirkung der Luft von Aufsen her, von dem Dotter des Eies genähret wird; so auch der Keim des Samenkorns seine erste Nahrung aus einer dem Eidotter sehr analogen Substanz entnimmt, welche den Keim im Samenkorn einhüllet.

Von nun an aber und zwar so bald als die junge Pflanze die Samenlappen verloren hat, bedarf sie organischer Materien zur Nahrung. In dem Mafse dafs ihre Organe ausgebildet sind, nämlich: Wurzel, Stamm und Blätter, treten nun in die ihnen zukommenden Funktionen ein, die zur gröfsern körperlichen Ausbildung der ganzen Pflanze, so wie zur Erzeugung der Blüthe und der daraus hervorgehenden Frucht erfordert werden; wozu alle einzelne Organe derselben, unter Mitwirkung der mit organischen Materien (d. i. mit Humus) durchdrungnen Erde, des Wassers und der Atmosphäre, unter einflufsreicher Thätigkeit des Lichtes und der Wärme, in Wirksamkeit gesetzt werden.

Es ist hier nicht meine Absicht, über dasjenige mich weiter auszulassen, was über das Daseyn der chemischen Elemente der Pflanzen und deren Abstammung, durch die Herren Sennebiér, Thenard, v. Saussüre, Schrader, Decandolle, Woodhouse, Wahlenberg, Einhof, Bracconot, Brown, Chaptal, Humphry Davy und unsern trefflichen Collegen Alexander v. Humboldt, gedacht, gesagt und vielfältig niedergeschrieben worden ist, und wodurch sie die Grundlage zu einer naturgemäſsen Physiologie der Pflanzen gelegt haben, deren weitere Ausbildung rasch vorschreitet. Ich halte mich vielmehr allein an den Hauptgegenstand dieser Abhandlung, der im Folgenden bestehet:

Versuche

über den Einfluſs der Düngungsmittel auf die Bildung der nähern Gemeng- und Bestandtheile der Getreidearten.

Wenn ich hier von den nähern Bestandtheilen oder vielmehr Gemengtheilen der Pflanzen überhaupt und der Getreidearten insbesondere rede: so begreife ich darunter diejenigen, sowohl in der Form als in den chemischen Qualitäten verschieden gearteten Materien, welche in den Pflanzen und deren einzelnen Zweigen, in besondern Organen derselben abgelagert gefunden werden; wie in der Wurzel, dem Stamm, dem Splint, der Rinde, den Blättern, der Frucht u. s. w. und sich, wie bei den Thieren, bei einer groſsen Anhäufung in ihnen entweder freiwillig daraus ergieſsen; oder durch eine zweckmäſsige mechanische Zergliederung (wie das Amylon und die fetten Oele), oder eine chemische Zergliederung derselben (wie Gummi, Schleim, Kleber, Firniſs, Zucker, Harz, ätherischen Oel u. s. w.) daraus dargestellt werden können.

Daſs jene Materien als Erzeugnisse des Lebens und der organischen Thätigkeit der Pflanzen anerkannt werden müssen, wird wohl Niemand leugnen! Wie solche aber gebildet werden? welchen Einfluſs auf ihre Erzeugung die Individualität der Pflanze selbst hat? welchen Einfluſs die ihr, in Form des Düngers, dargebotenen Nahrungsmittel dar-

auf haben? dieses sind Fragen, welche zur Zeit noch nicht mit Bestimmtheit gelöset worden sind.

In einer frühern der Akademie mitgetheilten Abhandlung (über den Instinkt der Pflanzen[1]), habe ich gezeigt, dafs Pflanzen einerlei Art, in welchem Boden sie auch gewachsen sind, der Qualität nach, auch immer nur einerlei Gemengtheil produciren; dafs hingegen, individuell verschieden geartete Pflanzen, in einerlei Boden von gegebener Grundmengung kultivirt, in der Qualität ihrer Gemengtheile und Bestandtheile auch wieder eben so verschieden sind.

Da aber die nähern Gemengtheile und Bestandtheile der Pflanzen, nicht als solche, aus den verschiedenen Materien aufgenommen werden können, in und durch welche die Pflanze lebt und genährt wird; da jene Materien vielmehr in ihren elementaren Bestandtheilen und deren proportionellen Verhältnissen, eben so sehr von einander abweichen, als sie, in der Form und den chemischen Qualitäten von einander verschieden sind: so müssen es die eigenthümlichen einfachen Elemente seyn, welche die Pflanze, als nährende Mittel aufnimmt und sie, durch den Prozefs der Assimilation, in diejenigen Substanzen umwandelt, welche sich als wahre Gemengtheile derselben repräsentiren. Es entstehen daher folgende Fragen:

1. Können die nährenden Materien, welche den lebenden Pflanzen, in Form des Düngers, dargeboten werden, entweder ganz, oder in ihre einfachern Elemente aufgelöst, in die Organe der Pflanzen übertreten?
2. Können sie zur Erzeugung der nähern Gemengtheile in den Organen der Pflanzen beitragen?
3. Kann die Quantität jener Gemengtheile der Pflanze, durch die vermehrte Masse der zu ihrer Erzeugung geeigneten Elemente, in der Pflanze vermehrt werden?
4. Läfst sich aus der Erfahrung etwas für die Erfolge ableiten, dafs, wie solches die Wechselwirthschaft begründet, eine und eben dieselbe Getreideart, wenn sie mehrere Jahre hinter einander in dem-

---

(1) Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften, aus den Jahren 1812 und 1813. S. 107.

selben Boden gebauet wird, im Ertrage der Frucht mit jedem Jahr abnimmt; dagegen bei einem hintereinander folgenden Wechsel von verschiedenen Getreidearten, noch besser aber von Körner-, Wurzeln und Knollengewächsen, ein höherer Ertrag des Getreides erzielet wird.

Jenes waren die Aufgaben, die ich, durch eine Reihe von Versuchen zu lösen gesucht habe, und deren Resultate ich hier vorlege. Sie scheinen mir wichtig genug zu seyn, um sowohl der Pflanzen-Physiologie als der Agronomie einige bedeutende Aufklärungen darbieten zu können, die weiter verfolgt zu werden verdienen.

Eine chemische Zergliederung der Getreidekörner, nämlich Weizen, Roggen und Gerste, rücksichtlich ihrer nähern Gemengtheile, führt stets zur Erkenntnifs vom Daseyn des Amylons, des Klebers, des Pflanzeneiweifs, des Schleimzuckers, des Gummi, des sauren phosphorsauren Kalks, und einer geringen Menge Fettigkeit, die vorzüglich im Keimpunkte ihren Sitz hat.

Während jene Materien, der Qualität nach, in allen Getreidearten ohne Unterschied vorkommen, sind solche im quantitativen Verhältnifs, selbst bei einer und derselben Getreideart, oft sehr verschieden; und dieser Unterschied findet sich ganz besonders in der besondern Natur des Düngers begründet, welcher dem Acker zur Nahrung dargeboten wurde.

So steigt z.B. der Gehalt des Klebers (des *Triticin's*) im Weizen von einerlei Art, oft von 12 bis zu 36 Procent, je nachdem derselbe mit der einen oder der andern Art Dünger kultivirt worden war; folglich ist der Einflufs welchen der Dünger auf die Erzeugung des *Triticin's* im Weizen hat, dadurch völlig aufser Zweifel gesetzt.

Anmerkung. Der sehr achtbare französische Agronom Herr Tessier, hat bereits im Jahr 1791 eine Reihe von Versuchen angestellt, um die Wirkungen des Düngers auf die Erzeugung des Klebers im Weizen zu erforschen, indem er ihn mit Schaafmist, mit Ziegenmist, mit Pferdemist, mit Kuhmist, mit Menschenkoth, mit Taubenmist, mit Menschenharn, mit Rindsblut und mit Pflanzenerde kultivirte. Er hat aber das Versehen dabei begangen, dafs er die Massenverhältnisse jener Düngerarten

nicht auf den Zustand der atmosphärischen Trockenheit reducirt und die Anwendung gleich grofser Massen derselben, im gleichen Zustande der Trockenheit gebraucht hat: daher die Resultate seiner Versuche, so interessant sie übrigens auch sind, dennoch keine gegründete Folgerung zulassen.

Meine eigenen über denselben Gegenstand angestellten Versuche gehen von demselben Gesichtspunkte aus, den Herr Tessier vor Augen hatte; ich habe im Ganzen auch dieselben Düngerarten in Anwendung gesetzt. Um aber zu genaueren Resultaten zu gelangen, wurden sie sämmtlich vorher auf einen gleichen Zustand der Trockenheit gebracht, und für eine gegebene Fläche Ackerland auch immer nur eine gleich grofse Gewichtsmasse des trocknen Düngers in Anwendung gesetzt.

Der Boden, in welchem meine Versuche angestellt wurden, ist sandiger Lehm. Er wurde in einzelne Beete abgetheilt, jedes zu hundert Quadratfufs Flächenraum. Jedes einzelne gedachter Beete wurde mit 25 Pfund der folgenden, auf einen gleichen Zustand der Trockenheit gebrachten Düngerarten gedüngt, der Dünger unter gegraben, welches im October geschahe, und das so vorbereitete Land bis zum Monat Februar des folgenden Jahres in Ruhe gelassen. Die Düngerarten selbst bestanden, in 1. Schaafmist; 2. Ziegenmist; 3. Pferdemist; 4. Kuhmist; 5. Menschenkoth; 6. Taubenmist; 7. Menschenharn; 8. Rindsblut; 9. Pflanzenerde.

Anmerkung. Die Kotharten waren rein ohne Vermengung mit Streumitteln gesammelt und in einem mit Dämpfen geheizten Trockenofen, bei einer Temperatur, die 70 Grad Reaumur nicht überstieg, ausgetrocknet worden; eben so die Pflanzenerde. Das Blut und der Harn wurden gelinde abgedünstet, und zuletzt bei derselben oben genannten Temperatur, vollends ausgetrocknet.

Im Anfang des Märzmonats wurden sämmtliche Beete aufs Neue umgegraben, und nun mit einerlei Art Sommerweizen, in Reihen, besäet. Jedes einzelne Beet erhielt 16 Loth Samenkörner zur Aussaat. Ein gleiches im Herbst und im Frühjahr umgegrabenes Beet von derselben Bodenart, wurde mit demselben Weizen besäet, ohne Düngung empfangen zu haben.

Der Same ging auf allen Beeten gleichförmig auf, und die Aehren konnten von allen im Ausgang des Augusts geerntet werden. Hier zeigte sich aber, sowohl in der Länge und Dicke der Halme, als auch in der Ausbildung der Aehren so wie der Zahl der darin enthaltenen Körner, ein merklicher Unterschied.

Nach dem Ausdreschen des Ertrages von jedem einzelnen Beete, ergaben sich folgende Resultate. Es wurde gewonnen an Körnern:

a) Von dem mit Schaafmist gedüngten Beete 6 Pfund; also das zwölfte Korn.

b) Von dem mit Ziegenmist gedüngten, eben so viel.

c) Von dem mit Pferdemist gedüngten (sie wurden mit Hafer genährt), 5 Pfund, also das zehnte Korn.

d) Von dem mit Kuhmist gedüngten $3\frac{1}{2}$ Pfund, also das siebente Korn.

e) Von dem mit Menschenkoth gedüngten 7 Pfund, also das vierzehnte Korn.

f) Von dem mit Taubenmist gedüngten $4\frac{1}{2}$ Pfund, also das neunte Korn.

g) Von dem mit trocknem Menschenharn gedüngten 6 Pfund, also das zwölfte Korn. (Er war von Bier trinkenden Personen gesammelt.)

h) Von dem mit trocknem Rindsblute gedüngten 7 Pfund, also das vierzehnte Korn.

i) Von dem mit Pflanzenerde gedüngten (sie war aus verwesetem Kartoffelkraut gewonnen), $2\frac{1}{2}$ Pfund, also das fünfte Korn.

k) Von dem nicht gedüngten Boden $1\frac{1}{2}$ Pfund, also das dritte Korn.

In Rücksicht der Vermehrung des Körnerertrags, kommt also die Wirkung der gebrauchten Düngungsmittel in folgender Ordnung zu stehen: 1. Blut; 2. Menschenkoth; 3. Schaafmist; 4. Ziegenmist; 5. Menschenharn; 6. Pferdemist; 7. Taubenmist; 8. Kuhmist; 9. Pflanzenerde.

Es kam nun darauf an, durch eine genaue Zergliederung der von jedem einzelnen Düngungsmittel geernteten Samenkörner zu unter-

suchen, wie sich die Gemengtheile derselben im proportionalen Verhältnifs gegen einander verhalten würden; und hier fand sich in der That der Unterschied über alle Mafsen auffallend.

Die nicht wenig umständliche Zergliederung jener zehn Sorten des geernteten Weizens ist von mir nach derselben Methode veranstaltet worden, welche ich früher [1] mitgetheilt habe, daher ich mich hier darauf beziehe.

Hier begnüge ich mich blofs, die Resultate der jetzigen Zergliederungen mitzutheilen.

1. 5000 Gewichtstheile des mit Rindsblut kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	215	Theile.
Hülsensubstanz	695	—
Kleber oder *Triticin*	1712	—
Amylon	2065	—
Getreide-Oel	45	—
Eiweifs	53	—
Schleimzucker	94	—
Gummi	92	—
Sauren phosphorsauren Kalk	26	—
Verlust	3	—
	5000	—

2. 5000 Gewichtstheile des mit Menschenkoth kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	217	Theile.
Hülsensubstanz	700	—
Kleber oder *Triticin*	1697	—
Amylon	2072	—
Getreide-Oel	55	—
Eiweifs	65	—
Schleimzucker	80	—
Gummi	80	—

(1) Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1816 und 1817. Berlin 1819. S. 39. u. ff.

Sauren phosphorsauren Kalk	30	Theile.
Verlust	4	—
	5000	—

3. 5000 Gewichtstheile des mit Schaafmist kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	214	Theile.
Hülsensubstanz	698	—
Kleber oder *Triticin*	1645	—
Amylon	2140	—
Getreide-Oel	54	—
Eiweiſs	65	—
Schleimzucker	75	—
Gummi	78	—
Sauren phosphorsauren Kalk	36	—
Verlust	4	—
	5000	—

4. 5000 Gewichtstheile des mit Ziegenmist kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	215	Theile.
Hülsensubstanz	714	—
Kleber oder *Triticin*	1644	—
Amylon	2121	—
Getreide-Oel	45	—
Eiweiſs	66	—
Schleimzucker	78	—
Gummi	78	—
Sauren phosphorsauren Kalk	35	—
Verlust	4	—
	5000	—

5. 5000 Gewichtstheile des mit Menschenharn kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	250	Theile.
Hülsensubstanz	712	—
Kleber oder *Triticin*	1755	—
Amylon	1995	—

Getreide-Oel	54	Theile.
Pflanzen-Eiweifs	70	—
Schleimzucker	74	—
Gummi	80	—
Sauren phosphorsauren Kalk	40	—
Verlust	5	—
	5000	—

6. 5000 Gewichtstheile des mit Pferdemist kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	217	Theile.
Hülsensubstanz	700	—
Kleber oder *Triticin*	684	—
Amylon	3082	—
Getreide-Oel	50	—
Eiweifs	56	—
Schleimzucker	84	—
Gummi	86	—
Sauren phosphorsauren Kalk	38	—
Verlust	3	—
	5000	—

7. 5000 Gewichtstheile des mit Taubenmist kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	215	Theile.
Hülsensubstanz	700	—
Kleber oder *Triticin*	610	—
Amylon	3159	—
Getreide-Oel	46	—
Eiweifs	48	—
Schleimzucker	98	—
Gummi	96	—
Sauren phosphorsauren Kalk	25	—
Verlust	3	—
	5000	—

8. 5000 Gewichtstheile des mit Kuhmist kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	211	Theile.
Hülsensubstanz	697	—
Kleber oder *Triticin*	598	—
Amylon	3117	—
Getreide-Oel	52	—
Eiweiſs	50	—
Schleimzucker	99	—
Gummi	95	—
Sauren phosphorsauren Kalk	25	—
Verlust	4	—
	5000	—

9. 5000 Gewichtstheile des mit Pflanzenerde kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	211	Theile.
Hülsensubstanz	702	—
Kleber oder *Triticin*	480	—
Amylon	3297	—
Getreide-Oel	49	—
Eiweiſs	40	—
Schleimzucker	99	—
Gummi	95	—
Sauren phosphorsauren Kalk	24	—
Verlust	3	—
	5000	—

10. 5000 Gewichtstheile des in nicht gedüngtem Boden kultivirten Weizens haben geliefert:

Natürliche Feuchtigkeit	210	Theile.
Hülsensubstanz	700	—
Kleber oder *Triticin*	460	—
Amylon	3333	—
Getreide-Oel	50	—
Eiweiſs	36	—
Schleimzucker	96	—

Gummi	94	Theile.
Sauren phosphorsauren Kalk	18	—
Verlust	3	—
	5000	—

Vergleicht man die Resultate jener mit den auf eine verschiedene Weise kultivirten Weizenkörnern angestellten Analysen, mit Bezugnahme auf den Körnerertrag, der aus immer gleichen Massen des ausgesäeten Weizens, durch die Anwendung verschieden gearteter Düngungsmittel, in immer gleichem Gewicht, erzielet worden ist: so wird man dadurch zu folgenden Schlüssen hingeleitet.

1. Die verschiedenen Düngerarten haben einen entschiedenen Einfluſs auf den vermehrten Ertrag der Fruchtkörner, bei einer und eben derselben Getreideart.
2. Eben diese verschiedenen Düngerarten, haben einen entschiedenen Einfluſs auf die Erzeugung der nähern Gemengtheile der Körner; wie solches die Resultate der damit angestellten Analyse nachweisen.
3. Die Masse dieser nähern Gemengtheile stehet wieder im Verhältniſs mit der Masse der Fruchtkörner, welche aus einem gegebenen Gewichte der Aussaat producirt worden sind.
4. Die elementaren Bestandtheile der Düngerarten stehen mit den elementaren Bestandtheilen der producirten Fruchtkörner, so wie mit denen ihrer einzelnen Gemengtheile im Verhältniſs.

Den reichsten Ertrag an Körnern haben geliefert: 1. der Menschenkoth; 2. das Blut. Einen geringern Ertrag an Fruchtkörnern haben geliefert: 1. der Schaafmist; 2. der Ziegenmist; 3. der Menschenharn. Einen noch geringern Ertrag haben geliefert: 1. der Pferdemist; 2. der Taubenmist; nämlich, jener das zehnte, der Letztere das neunte Korn. Einen noch geringern Ertrag hat geliefert die Pflanzenerde, nämlich nur das fünfte Korn. Den allergeringsten Ertrag hat endlich der nicht gedüngte Boden geliefert, nämlich nur das dritte Korn.

Die Hauptbestandtheile im Weizen bleiben immer der Kleber oder das *Triticin*, und das Amylon. Jener ist rein animalischer, das Letztere rein vegetabilischer Natur.

Nun haben geliefert 5000 Gewichtstheile Weizenkörner, an Kleber oder *Triticin*:

gedüngt mit Menschenkoth	1697	oder 33,14	Procent.
- - Rindsblut	1712	- 34,24	—
- - Schaafmist	1645	- 32,90	—
- - Ziegenmist	1644	- 32,88	—
- - Menschenharn	1755	- 35,10	—
- - Pferdekoth	684	- 13,68	—
- - Taubenmist	610	- 12,20	—
- - Kuhmist	598	- 11,96	—
- - Pflanzenerde	480	- 9,60	—
Kultivirt mit nicht gedüngter Erde	460	- 9,20	—

Desgleichen haben geliefert an Amylon, 5000 Gewichtstheile Weizenkörner:

gedüngt mit Menschenkoth	2072	oder 41,44	Procent.
- - Rindsblut	2065	- 41,30	—
- - Schaafmist	2140	- 42,80	—
- - Ziegenmist	2121	- 42,43	—
- - Menschenharn	1995	- 39,90	—
- - Pferdemist	3082	- 61,64	—
- - Taubenmist	3159	- 63,18	—
- - Kuhmist	3117	- 62,34	—
- - Pflanzenerde	3297	- 65,94	—
Kultivirt ohne Dünger	3333	- 66,69	—

Es ist aber der Kleber oder das *Triticin* zusammengesetzt aus Kohlenstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Sauerstoff und Phosphor, als seinen chemischen Elementen; und in der That finden sich eben diese Elemente in denjenigen Düngerarten am meisten angehäufet, welche in einem gegebenen Gewicht der Körner, auch die gröſste Ausbeute an Kleber oder *Triticin* geliefert haben; es ist also offenbar, daſs jene Elemente, zur Erzeugung des genannten Gemengtheils im Weizen, aus dem angewendeten Düngungsmittel entnommen worden sind.

Das reine Amylon enthält weder Stickstoff noch Phosphor unter seinen elementaren Bestandtheilen; diese sind bloſs Kohlenstoff,

Wasserstoff und Sauerstoff; sie müssen also gleichfalls aus den zur Kultur angewendeten Düngungsmitteln entnommen worden seyn. Die Ausbeute an Amylon, aus gleichen Gewichten der mit verschiedenen Düngungsmitteln kultivirten Körner, stehet aber wieder im Verhältnifs mit der mehr vegetabilischen und weniger animalischen Natur der dazu gebrauchten Düngerarten.

Es ist also wohl keinem Zweifel unterworfen, dafs die Grundmischung des Weizens, und, sowohl sein Gehalt an Kleber als an Amylon, beide nach dem proportionalen Verhältnifs betrachtet, durch die specifische Natur und Grundmischung des Düngers, womit sie kultivirt worden, geleitet wird; auch ist es einleuchtend, dafs ein gleicher Erfolg bei allen übrigen Getreidearten statt finden mufs.

Ist jenes aber in der Wahrheit begründet, so sind jene aus der Erfahrung entnommenen Resultate, so für die Pflanzen-Physiologie, wie für die Agronomie, von Bedeutung, denn es wird dadurch ein Problem gelöst, das bisher ganz im Dunkeln schwebte.

Es ist nämlich bekannt, dafs eine und eben dieselbe Art Weizen, in einerlei Art Erdreich gebauet, ein sehr verschiedenes Korn darbietet: d. i. welches in seiner Grundmischung und den davon abhängigen Leistungen in den mit der Agronomie in Relation stehenden technischen Gewerben, sich sehr verschieden beweiset.

So giebt es manchen Weizen einerlei Art, aber mit verschieden gearteten Düngungsmitteln kultivirt, der bald mehr, bald weniger Ausbeute an Amylon, an Brantwein, an kraftvollem Bier und an Essig darbietet, wenn er auf jene Gegenstände, in den ökonomisch-technischen Gewerben, verarbeitet wird.

Da aber Brantwein, Bier und Essig nur allein aus dem Amylon gebildet werden; da der Kleber zu deren Erzeugung nichts beiträgt: so mufs auch die Ausbeute der genannten Erzeugnisse mit dem Gehalte des Amylons im Weizen (eben sowohl auch in den übrigen Getreidearten), im Verhältnifs stehen.

Anders dagegen verhält es sich mit dem Brote, zu welchem das Mehl des Weizens verarbeitet wird. Dieses ist um so kraftvoller und nährender, je reichhaltiger das Mehl an Kleber und je ärmer dasselbe an Amylon war.

Die aus den oben mitgetheilten Resultaten meiner angestellten und beschriebenen Versuche und dadurch gemachten Erfahrungen, machen es sehr wahrscheinlich, daſs in der Wahl des Düngers dem Agronomen die Mittel zu Gebote stehen, den Gehalt des Klebers und des Amylons in den Getreidearten, nach Willkühr zu reguliren, um die specifische Anwendbarkeit desselben für das eine oder das andere ökonomisch-technische Gewerbe, das derselben bedarf, näher zu begründen.

Ueber

die Grundlehren der Akustik.

Von

Hrn. FISCHER.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 17. und 24. Juny, und 15. July 1824.]

Einleitung.

Wenn die Theorie der Akustik in der vollkommensten Strenge ausgeführt werden soll, so kann dieses nur durch Hülfe der höhern Mechanik geschehen: denn die Oscillationen durch welche der Schall entsteht, sind eine der allerfeinsten und verwickeltesten Arten von Bewegungen, wobei die bewegten Punkte der Materie ihren Ort nur unermefslich wenig verändern, diese Bewegungen selbst aber von Stelle zu Stelle in dem Innern der Materie fortschreiten, und sich daselbst auf die mannigfaltigste Art durchkreuzen, verbinden und trennen. Wie schwierig diese Theorie sei, geht schon daraus hervor, dafs die gröfsten Analytiker des verflossenen Jahrhunderts mit eifersüchtiger Anstrengung versucht haben, die wichtigsten Probleme aufzulösen, und man dennoch nicht sagen kann, dafs es ihnen gelungen sei, uns eine vollendete Grundlage der Theorie zu geben.

Newton, der zu allen Untersuchungen der höheren Bewegungslehre den ersten festen Grund gelegt hat, untersuchte zuerst die Oscillationen der Luft; Taylor zunächst nach ihm, die einer gespannten Saite. Ihre Schlüsse und Rechnungen wurden mit grofser Strenge geprüft, von den beiden Bernoulli, Johann und Daniel, von L. Euler, von d'Alembert, von Lagrange und Andern, und dieses nicht ohne Eifersucht gegen die ersten Erfinder, und gegenseitig unter einander. Das Ergebnifs dieser Prüfungen war, dafs sich zwar gegen die Voraus-

setzungen, die Newton und Taylor gemacht hatten, gegründete Erinnerungen machen liefsen, dafs man aber ihren Hauptformeln durchaus keinen Fehler nachweisen konnte.

Diese Anstrengungen sind für die höhere Analysis und Mechanik eine Quelle sehr wichtiger Erweiterungen geworden. Die Akustik selbst aber hat dadurch nicht sowohl neue Ansichten, als gröfsere Bestimmtheit und Sicherheit in ihren Erklärungen gewonnen: denn diejenigen Eigenschaften der Oscillationen, von denen der Schall abhängt, waren schon vor der Rechnung, den Physikern unmittelbar aus Betrachtung der akustischen Erscheinungen bekannt.

Man wufste vor Newton und Taylor, dafs die Empfindung des Schalles durch Oscillationen der Luft entstehe, und dafs diese meistens durch Oscillationen fester Körper erregt werden; dafs die Luft in Blas-Instrumenten Longitudinal-Oscillationen mache; dafs alle diese Oscillationen vollkommen gleichzeitig, und ihre Schläge ungemein schnell seyn müssen, wenn die Empfindung eines Tones entstehen soll; und dafs die Höhe des Tones von der bestimmten Anzahl der Oscillations-Schläge in einer Sekunde abhänge. Man kannte ferner den Zusammenhang der musikalischen Intervalle mit der Schnelligkeit der Oscillationen, und Sauveur hatte schon vor Taylor auf eine sehr sinnreiche Art versucht, die Anzahl der Oscillationen, die ein Ton von bestimmter Höhe erfordert, durch Beobachtung zweier Orgelpfeifen, die beinahe denselben Ton gaben, zu bestimmen. In Rücksicht aller dieser Gegenstände gewann aber die Akustik durch die mathematische Theorie nicht neue Wahrheiten und vergröfserten Umfang, sondern nur gröfsere Bestimmtheit und Evidenz. Was sie durch die mathematische Theorie gewann, war hauptsächlich die bestimmte Kenntnifs der Gesetze, nach welchen die Höhe des Tones von der Gröfse und Masse und von der Spannung oder Elasticität der oscillirenden Theile abhängt. Die entscheidensten Untersuchungen verdanken wir dem Scharfsinn des trefflichen Lagrange, der so wie mehrere der genannten berühmten Männer, einst eine Zierde unserer Akademie war. Er zeigte in seinen höchst scharfsinnigen *Recherches sur la propagation du son* (1), worin Newton,

---

(1) *Miscellanea Taurinensia, Tom.* I *et* II.

Taylor, und alle seine Vorgänger gefehlt hatten, und wie die Untersuchung anzugreifen sei, um nicht nur fehlerfreie Resultate zu erhalten, sondern auch allen Foderungen der strengsten Methode Genüge zu leisten.

Demohngeachtet kann man nicht sagen, dafs Lagrange eine vollständige Theorie der Oscillationen geliefert habe. Noch ist mehr als ein Problem rückständig, dessen Auflösung man von den Fortschritten der Analysis und höhern Mechanik erwarten mufs. Dahin gehört die Berechnung der Oscillationen ganzer Flächen, desgleichen die Theorie des Ueberganges der Oscillationen aus einer Materie in eine anderartige. In Ansehung dieses letztern Problems scheinen die genannten grofsen Männer noch gar nicht auf die Nothwendigkeit dieser Theorie aufmerksam geworden zu seyn, denn alle von Newton bis auf Lagrange, betrachten immer nur die Oscillationen in so fern sie in einem und demselben Mittel statt finden; erwähnen aber des Ueberganges aus einem Mittel in das andere, entweder gar nicht, oder so als ob derselbe gar keiner eigenen Theorie bedürfe. Wir werden aber sehen, dafs man ohne eine genauere Kenntnifs der Gesetze dieses Ueberganges von den meisten akustischen Erscheinungen gar keine befriedigende Erklärung geben könne (1).

Die genannten Analytiker haben also in der höhern Mechanik noch eine grofse Lücke auszufüllen übrig gelassen; nämlich die Entwicklung der Gesetze nach welchen körperlich sich berührende Punkte bewegend auf einander wirken, wenn sie sich im Zustande einer gegenseitigen Spannung befinden. Die bekannten Gesetze des Anstofses setzen eine solche Spannung nicht voraus; der Erfolg nach diesen Gesetzen kann also auch eigentlich nur dann vollkommen statt finden, wenn die sich berührenden Körper als frei, also in einem von aller widerstehenden Materie leeren Raum angenommen werden. Und

---

(1) Einige neuere Analytiker in England und Frankreich, besonders Fresnel und Poisson scheinen in der That die Theorie bedeutend weiter geführt zu haben; doch nicht in Beziehung auf den Schall, sondern auf das Licht. Aber die Verhältnisse des Verfassers haben ihm noch nicht erlaubt, sich mit diesen Arbeiten genau bekannt zu machen; welches indessen für die gegenwärtige Abhandlung nicht nothwendig schien, da diese mehr den Zweck hat zu zeigen, was die Beobachtung, als was die Rechnung über die Gesetze der Oscillationen lehre.

für diese Voraussetzung hat man in der That die Theorie der Bewegungen zu einem völlig befriedigenden Grad der Vollendung gebracht. Für die Bewegungen im Zustande der Spannung aber, sind die oben erwähnten scharfsinnigen Untersuchungen über die Oscillationen in gleichartigen Mitteln ein sehr schätzenswerther Anfang, aber in der That auch nur ein Anfang, der die Möglichkeit einer vollständigen Ausführung anschaulich macht, die aber in der That nichts weniger als leicht seyn dürfte. Nothwendig ist aber solche Ausführung: denn alle Bewegungen innerhalb des Raumes wo wir leben, geschehen zwischen körperlichen Theilen, die sich im Zustande einer gegenseitigen Spannung berühren. Und eben darin dürfte vielleicht der eigentliche Grund liegen, warum die geprüftesten Formeln der Mechanik dennoch oft so sonderbar von der Wirklichkeit abweichen, wie z. B. Newtons Formel für die Geschwindigkeit des Schalles.

Selbst die Idee einer allgemeinen Spannung, in welcher sich alle körperliche Punkte nicht nur im Innern der Körper, sondern auch in der Oberfläche, wo sich ungleichartige Materien berühren, befinden, (der Aggregatzustand beider sey wie man will), gehört zu den Ideen, die eine sehr feine Analyse aller Erscheinungen voraussetzen, und daher erst nach und nach zum deutlichen Bewufstseyn in dem menschlichen Vorstellungsvermögen gelangen können.

Hätte ich auch in den Jahren des kraftvollen männlichen Alters zu meinen Kräften das Vertrauen haben dürfen, die Auflösung so schwieriger Aufgaben zu versuchen, so war dieses doch unmöglich in den Verhältnissen nicht nur eines Schulmannes, sondern überhaupt eines anderweitig beschäftigten Gelehrten: denn Untersuchungen dieser Art erfordern nicht Wochen und Monate, sondern Jahre einer ungestörten wissenschaftlichen Mufse.

Unausweichlich gezwungen, auf ein höheres Ziel, was mir vorschwebt, zu verzichten, habe ich mir ein näheres leichter erreichbares gewählt. Der vollständigen mathematischen Theorie eilt gewöhnlich eine empirische, d. i. unmittelbar aus den Erscheinungen abgeleitete voraus. Kepler entdeckte die Hauptgesetze, unter welchen die Bewegungen der Planeten stehen, durch eine sehr mühsame Entzifferung aus ihrem scheinbaren Lauf, ehe Newton diese Gesetze auf die ersten Grund-

begriffe von der Bewegung zurückführte. Eben so kannte man die Hauptgesetze der akustischen Oscillationen aus unmittelbarer Beachtung der Erscheinungen früher, als die genannten Analytiker ihre rationale Theorie erfanden. Ja man kann behaupten, daſs den rein mathematischen Theorien physikalischer Erscheinungen allezeit eine bloſs auf Erfahrungen beruhende vorausgehen müsse, wenn Mathematik und Physik Schritt halten, und in gleichem Grade zur Vollkommenheit reifen sollen. Es läſst sich erweisen, daſs die wichtigsten Erweiterungen, welche die Mathematik, besonders in dem verflossenen Jahrhundert, in dem Gebiete der höhern Analysis und Mechanik erhalten hat, fast ohne Ausnahme veranlaſst sind durch Probleme, welche die Naturlehre aufstellte. Mathematische Theorien, die nicht diesen Ursprung haben, und welche nicht etwa bloſs zur Vervollkommnung schon begründeter Theorien dienen, sondern als ganz neue und isolirte Erzeugnisse im Gebiete der Mathematik da stehen, haben als bloſse Wahrheiten einen unbestrittenen Werth, aber wichtig und fruchtbar werden sie erst dann, wenn sich gleichsam zufällig, eine Art von Naturerscheinungen an sie anschlieſst. So war bisher die Theorie der regulären Körper eine rein mathematische Speculation, und hatte als Wahrheit ihren unbestrittenen Werth; aber durch die Entdeckungen, die neuerlich über die Structur der Krystalle gemacht worden, hat sie offenbar an Wichtigkeit und Fruchtbarkeit ungemein gewonnen. Je mehr aufzulösende Aufgaben also die Naturlehre der Mathematik vorlegt, desto mehr fruchtbare Erweiterungen der mathematischen Theorien darf man erwarten. Soll aber dieser Zweck sicher erreicht werden, so muſs die Naturlehre ihren Aufgaben die gröſste Bestimmtheit zu geben suchen. Geschieht dieses nicht, so wird der Mathematiker mit allem Scharfsinn, den er anwendet, dennoch keine vollständigen und erschöpfenden Theorien zu Stande bringen. So fand Lagrange die Probleme der Akustik noch nicht vollständig von den Physikern aufgestellt, und um etwas bestimmtes zu erwähnen, so ist selbst jetzt noch der Begriff der Resonanz nicht scharf genug bestimmt: denn man schreibt der Resonanz Erscheinungen zu, die gar nichts mit ihr gemein haben. Es ist daher kein Wunder, daſs Lagrange und noch weniger seine Vorgänger eine vollständige, d. i. auf alle Fälle anwendbare Theorie geben konnten. Es ergiebt sich hieraus sehr bestimmt, was

das Hauptgeschäft des Naturforschers sey, und seyn müsse. Er mufs die Gesetze der Erscheinungen aus den Erscheinungen selbst so genau als möglich zu bestimmen suchen. Er kann dabei der Hülfe der Mathematik nicht entbehren; doch ist es mehr der Geist mathematischer Ordnung, Deutlichkeit und Genauigkeit, als die Kenntnifs der höhern Rechnungen. Denn in der That sind gegenwärtig Mathematik und Physik so überaus weitläuftig geworden, dafs in einem Kopfe nicht Umfang genug für beide Wissenschaften ist, d. h. es ist eben so unmöglich, dafs der Physiker ein vollendeter Mathematiker, als dieser ein vollendeter Physiker sey. Arbeitet aber der Physiker dem Mathetiker auf die angedeutete Art vor, so ist sichtbar, dafs beide Wissenschaften gewinnen werden.

Ich habe versucht, dieses in Ansehung der Akustik zu leisten, indem ich theils für die Fälle, die schon als theoretisch feststehend anzusehen sind, theils für die, wo die Theorie noch mangelhaft ist, die Haupterscheinungen und die Gesetze derselben, so fern sie empirisch erkennbar sind, auf deutliche Begriffe zu bringen gesucht habe. Hiemit ist der Zweck und Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung ausgesprochen; wobei ich nur um gefällige Nachsicht bitten mufs, wenn ich, um Deutlichkeit und Ueberzeugung zu bewirken, manches Bekannte nicht mit Stillschweigen übergehen kann, wobei ich mich indessen aller Kürze, welche nur der Zweck zuläfst, befleissigen werde.

Von Oscillationen überhaupt.

§. 1. Oscillationen nenne ich diejenige Art von pendelartigen Schwingungen oder Vibrationen, welche innerhalb so enger Grenzen, die ich die Oscillations-Weite nenne, geschehen, dafs sie sich in den meisten Fällen der unmittelbaren Wahrnehmung entziehen, ja in manchen Fällen, im eigentlichsten Sinne des Wortes, unendlichklein seyn dürften. Da aber alle wissenschaftlichen Forschungen, wenn sie gründlich seyn sollen, von ganz bestimmten und möglichst deutlichen Grundbegriffen ausgehen müssen, so ist nothwendig, zuerst einiges Allgemeine über diejenigen Eigenschaften aller körperlichen Materien voraus zu schicken, wodurch Oscillationen möglich werden.

§. 2. Die Möglichkeit oscillirender Bewegungen beruhet darauf, dafs alle Theile der uns umgebenden körperlichen Materie sich in dem Zustande einer gegenseitigen Spannung befinden, vermöge deren die relative Ruhe der Theile gegeneinander, nicht daher rührt, weil keine Kraft auf sie wirke, sondern daher, weil jeder Theil nach allen Seiten gezogen oder getrieben wird, durch Kräfte, die sich gegenseitig ins Gleichgewicht gesetzt haben. Eine solche Spannung findet nicht nur in dem Innern eines jeden gleichartigen Körpers ohne Ausnahme statt, sondern sie entsteht nothwendig auch bei der äufsern Berührung ungleichartiger Materien, also mit einem Wort überall in der uns umgebenden Körperwelt. Man pflegt diese Spannung ziemlich allgemein Elasticität zu nennen; gegen welchen Ausdruck nichts zu sagen ist, wenn dadurch blofs die Thatsache einer allgemein vorhandenen Spannung bezeichnet werden soll. Als Benennung einer Kraft aber, die nach bestimmten allgemeinen Gesetzen wirke, ist die Benennung zu unbestimmt; denn es läfst sich leicht sichtbar machen, dafs diese Spannung von mehreren unterschiedenen Kräften herrühre, und dafs sich besonders die verschiedenen Aggregatzustände der Körper in dieser Rücksicht unläugbar und unzweideutig von einander unterscheiden.

§. 3. Bei luftförmigen Körpern liegen die Kräfte, welche eine Spannung aller Theile hervorbringen, am deutlichsten vor Augen. Sie ist die Folge einerseits von der Expansivkraft der Luft, andererseits aber von einem blofsen äufsern Drucke; im Freien von dem Gewicht der überstehenden Luft; in geschlossenen Gefäfsen, von der Cohäsionskraft der sperrenden Wände. Dieser äufsere Druck ist gewöhnlich von einer beständigen Gröfse; die Gesetze der Expansivkraft aber sind hinlänglich bekannt. Sie verhält sich bei gleicher Temperatur wie die Dichtigkeit, und bei gleicher Dichtigkeit wie die Temperatur nach dem Luft-Thermometer.

§. 4. Bei tropfbaren Körpern ist schon das Spiel der thätigen Kräfte nicht so einfach; ja man mufs bei ihnen eine doppelte Art der Spannung unterscheiden. Die eine hängt ab einerseits von der Schwere, deren Druck sich durch alle Theile der Flüssigkeit verbreitet, andererseits von dem Widerstand der unten und seitwärts sperrenden Wände. Sie besteht also eigentlich in nichts, als in dem hydrosta-

tischen Gleichgewicht. Von einer freien Expansivkraft zeigt sich bei tropfbaren Flüssigkeiten keine Spur.

Dagegen ist man genöthigt, bei jeder solcher Flüssigkeit noch das Daseyn einer eigenen Spannung anzuerkennen, die lediglich von dem Daseyn einer innern zwischen den Theilen herrschenden Attractiv- und Repulsivkraft herrührt, deren Gesetze eigentlich noch gar nicht untersucht sind, und vor der Hand nur nach Analogien anticipirt werden müssen. Wäre es auch nicht in neuern Zeiten durch Perkin's directe Versuche erwiesen, dafs Wasser durch mechanische Kraft ein wenig zusammengedrückt werde, und wenn der Druck nachläfst, wieder zu seiner ersten Dichtigkeit zurück kehre, so müfste man doch das Daseyn solcher Eigenschaft schon deswegen einräumen, weil man sonst gar keinen deutlichen Grund angeben könnte, warum sich jeder Druck durch eine Flüssigkeit, nicht blofs in der Richtung des Druckes, sondern nach allen Seiten in gleicher Stärke fortpflanze. Auch giebt es eine Menge anderer Erscheinungen, welche diese Voraussetzung zu machen nöthigen, und besonders würde man schwerlich ohne dieselbe die Entstehung akustischer Oscillationen im Wasser begreiflich machen können, deren Daseyn doch nicht bezweifelt werden kann.

§. 5. Elasticität oder Federkraft im engeren Sinne des Wortes findet nur bei festen Körpern statt, ist aber eine allgemeine Eigenschaft derselben. Feste Körper zeigen keine Spur von einer freien Expansivkraft oder Contractivkraft, noch von einer solchen Beweglichkeit der Theile, wie wir sie bei flüssigen Körpern finden, sondern im Gegentheil ein Bestreben, in einem gewissen Zustand zu beharren. Doch können durch Drücken, Ziehen, Beugen oder Drehen einzelne Theile ein wenig aus ihrer natürlichen Lage gebracht werden; aber alsdann zeigen die Theile jederzeit das Bestreben in ihren ersten Zustand zurückzukehren, sobald die störende Kraft nachläfst. Ist diese störende Kraft nur schwach, so geschieht die Wiederherstellung des ersten Zustandes vollständig. Ueberschreitet diese Kraft eine gewisse Gröfse, so zeigt sich zwar auch jetzt noch das Bestreben den ersten Zustand herzustellen, aber die Herstellung erfolgt unvollständig. Jenes nennt man die Wirkung einer vollkommenen, dieses einer unvollkommenen Elasticität. Beide finden bei jedem festen Körper statt, nur sind die

Gränzen beider sehr verschieden, und bei Körpern die man gewöhnlich unelastisch nennt, sind sie sehr enge. Man würde sich aber von der Elasticität harter Körper eine unrichtige Vorstellung machen, wenn man annehmen wollte, daſs ihre Theile nur einem starken Druck nachgäben. Man ist vielmehr genöthigt anzunehmen, daſs der leiseste Druck, an der berührten Stelle einige wiewohl unermeſslich kleine Zusammendrückung hervorbringe.

§. 6. Die Elasticität gehört unstreitig zu den eigenthümlichen Wirkungen der Cohäsionskraft. Aber die Gesetze ihrer Wirkungen dürften wohl, wie ich glaube, Stoff zu manchen sehr wichtigen Untersuchungen geben. Doch hat sich aus einer Menge angestellter Versuche ein allgemeines Gesetz ergeben, welches in den Gränzen der vollkommenen Elasticität, entweder genau, oder mit einer groſsen Annährung richtig ist. Es sei *A* Fig. 1. ein Punkt eines festen Körpers, und er sei durch Druck oder Zug, durch Beugen oder Drehen, aus der Stelle *A* in *B* gebracht. Hat die Kraft die Gränze der vollkommenen Elasticität nicht überschritten, so strebt der Punkt nach *A* zurück mit einer Kraft, welche der Entfernung *BA* proportional ist. So verhielt es sich wenigstens bei gespannten Saiten.

Aber die neuern Entdeckungen über die Structur der Krystalle deuten auf höchst merkwürdige Eigenthümlichkeiten der Cohäsionskraft, deren Gesetze aber vor jetzt noch in ein ziemlich tiefes Dunkel gehüllt sind, deren Enthüllung aber der höhern Mechanik ein ganz neues Feld eröffnen dürfte. Diese Entdeckungen setzen es nämlich ausser Zweifel, daſs der Purkt *A*, er sei im Innern, oder an der Oberfläche eines festen Körpers, nicht in allen Richtungen mit gleicher Kraft gezogen wird, und ziehet. Daher wird er auch, wenn er aus *A* nach *B* getrieben ist, nicht in allen Fällen mit gleicher Kraft zurückgetrieben. Ob diese Kraft nun unter allen Umständen, wenn der Punkt von *B* nach *A* zurückkehrt, wie die Entfernung von *A* abnehme, ist wahrscheinlich, aber nicht unmittelbar deutlich, und würde erst nach den Grundsätzen der höhern Bewegungslehre auszumitteln seyn. Aber der Mathematiker wird sich immer nur auf Hypothesen stützen müssen, so lange sich der Naturforscher der Gesetze dieser Kräfte die nur in der Berührung wirken,

und in verschiedenen Richtungen ungleiche Spannung hervorbringen, noch nicht vollständig bemächtigt hat.

§. 7. Dadurch dafs die Gesetze der Expansivkraft der Luft, und der Elasticität gespannter Saiten hinlänglich bekannt sind, ist es möglich geworden, zwei Grundprobleme der Akustik, die Oscillationen der Luft und gespannter Saiten der Rechnung zu unterwerfen, und ihre Gesetze mit mathematischer Genauigkeit zu bestimmen.

Ich setze diese Theorie als bekannt voraus, und bemerke blofs zur Verständlichkeit alles folgenden, dafs wenn Oscillationen entstehen sollen, unmittelbar nicht der ganze Körper, sondern nur einzelne Theile desselben in Bewegung gesetzt werden müssen. Denn ein Stofs, der gegen einen Theil eines Körpers gerichtet ist, wirkt immer unmittelbar nur auf diesen Theil, und theilt sich erst nach und nach der übrigen Masse mit. Daher bewirkt nicht nur bei der Luft, sondern bei jedem Körper, ein Stofs, der irgend einen Theil um eine äufserst geringe Weite aus seiner natürlichen Lage bringt, allezeit eine Verdichtung der Masse an der Stelle wohin ein Punkt derselben getrieben wird, welche in jedem Fall dadurch in eine erhöhte Spannung versetzt wird, aus welcher das Bestreben entsteht, in die erste Stelle zurückzukehren.

§. 8. Es sei nun wieder A Fig. 1. ein aus seiner natürlichen Lage nach B, innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität verrückter Punkt, so sieht man leicht ein, dafs er mit zunehmender Geschwindigkeit, aber mit abnehmender Beschleunigung, nach A zurückkehren wird, (die Beschleunigung in jedem Punkte D sei dem Abstand von A proportional oder nicht). In A ist daher die Beschleunigung Null, die Geschwindigkeit aber ein Maximum. Daher kann er in A nicht stillstehen, und wäre seine Bewegung frei, so würde er bis C gehen (wenn $AC = AB$), und alsdann fortfahren zwischen B und C wie ein Pendel hin und her zu schlagen. Aber seine Bewegung ist nicht frei. Denn wegen des Zusammenhanges mit der übrigen Masse, kann er nicht oscilliren, ohne die ihn berührenden Theile mit fortzudrücken und zu ziehen. Soviel Bewegung er aber anderen Punkten mittheilt, eben soviel verliert er an seiner eigenen. Die zweite Hälfte des Weges den er durchläuft, ist also kürzer als die erste, und indem er von C

gegen *A* zurückschlägt, so wird er sich auf der ersten Seite noch weniger von *A* entfernen. Kurz, er wird in den allermeisten Fällen, nach sehr wenigen Oscillationen, wie man an jeder Claviersaite sieht, wieder zur Ruhe kommen, wofern nicht die bewegende Kraft, wie bei dem Streichen mit einem Bogen, immer fortwirkt.

§. 9. Es ist aber theoretisch erwiesen, und durch die Beobachtung vollkommen bestätigt, dafs die Dauer einer Oscillation von der Gröfse der Oscillationsweite unabhängig ist, so dafs alle Oscillationen desselben Punktes vollkommen gleichzeitig sind, er mag zwischen *B* und *C*, oder nur zwischen *D* und *E* oscilliren. Wenigstens verhält es sich so, wenn der oscillirende Punkt nicht über eine gewisse Gränze aus seiner natürlichen Lage herausgetrieben wird. Da ich als bekannt und ausgemacht voraussetze, dafs die Höhe eines Tones lediglich von der Dauer seiner Oscillationen abhängt, so kann man sich auf die einfachste Art von der Gleichzeitigkeit der Oscillationen überzeugen, wenn man den Ton einer Saite oder einer Stimmgabel verklingen läfst, wo man nicht die allergeringste Veränderung in der Höhe des Tones wahrnehmen wird.

Unterschied zwischen ursprünglichen und mitgetheilten Oscillationen.

§. 10. Ursprünglich nenne ich eine Oscillation, wenn ein einzelner Punkt irgend eines Körpers durch einen äufsern Druck oder Zug, in oscillirende Bewegung gesetzt wird. Mitgetheilt nenne ich sie, wenn ein ruhender Punkt durch unmittelbare Berührung eines schon oscillirenden, mit zu oscilliren genöthigt wird, wobei es weiter keinen Unterschied macht, ob der mittheilende Punkt ursprünglich, oder selbst schon durch Mittheilung oscillirt.

Es ist nicht schwer einzusehen, dafs mitgetheilte Oscillationen an sich keine andere Gesetze befolgen können, als ursprüngliche. Denn wenn ein Punkt deswegen oscillirt, weil ein anderer, der durch Berührung und Spannung mit ihm verbunden ist, oscillirt, so mufs die Bewegung desselben genau in dem Maafse zu- und abnehmen, wie die des mittheilenden. Nur in der Vibrationsweite kann, wie wir in der Folge

sehen werden, zwar eine, aber nur im eigentlichsten Sinne unendlich kleine Veränderung vorgehen.

Demohngeachtet halte ich die schärfste Auffassung des Unterschiedes zwischen ursprünglichen und mitgetheilten Oscillationen für so wichtig, dafs man ohne dieselbe schwerlich zu deutlichen Begriffen und Erklärungen über akustische Erscheinungen gelangen wird. Denn wir werden uns in der Folge überzeugen, dafs die Dauer und die Gröfse der Oscillationen in einer sehr verschiedenen Abhängigkeit von der Beschaffenheit des Mittels stehen, in welchem sie statt finden, je nachdem sie ursprünglich oder mitgetheilt sind.

Anmerkung. Dieser Unterschied ist bisher entweder ganz übersehen, oder nicht gehörig benutzt worden. Unser Chladni ist der einzige mir bekannte Akustiker, der ihn in seiner Akustik (§. 163. ff.) bestimmt ausspricht; nur nennt er eigenthümliche Oscillationen, was ich ursprüngliche nenne. Doch lassen sich aus der genaueren Beachtung dieses Unterschiedes weit mehr für die Theorie fruchtbare Folgerungen ableiten, als Chladni in seinem schätzbaren Werke abgeleitet hat. Die mathematischen Akustiker, selbst Lagrange, kennen diesen Unterschied gar nicht.

Ursprüngliche Oscillationen.

§. 11. Wenn Theile eines Körpers, auf die oben (§. 8.) beschriebene Art zu oscilliren genöthigt werden, so hängt die Dauer eines Schlages ganz und gar nicht von der Stärke des erregenden Anstofses ab, sondern lediglich von der Kraft, mit welcher die verschobenen Theile wieder in ihre natürliche Lage zurückgetrieben werden, also von der vorhandenen Spannung und von der Masse der verschobenen Theile. Der Grund ist leicht einzusehen. Ist der Punkt A durch äufsere Kraft aus A nach B getrieben, so kann er nicht eher anfangen zu oscilliren, als bis diese äufsere Kraft ihn frei läfst. Dann kann er lediglich derjenigen Kraft folgen, mit welcher ihn die vorhandene Spannung wieder nach A hintreibt.

Von der Stärke des Stofses hängt blofs die Gröfse der Oscillationsweite BC ab, durch welche aber die Dauer der Schläge, und die Höhe des Tons nicht geändert wird (§. 9.).

§. 12. Dieses Gesetz der ursprünglichen Oscillationen würde sich sehr vollständig empirisch erkennen lassen, wenn es nicht schon hinreichend durch die Mechanik begründet wäre.

In jedem Körper kann man unter gegebenen Umständen, nicht jeden beliebigen, sondern nur ganz bestimmte Töne hervorbringen. In manchen nur einen, in anderen mehrere, oder eine ganze Reihe, die aber sämmtlich nach bestimmten Verhältnissen von einander abhängen. Dieses ist vorzüglich der Gegenstand, über welchen unser Chladni durch seine sinnreiche Beobachtungsart so viel Licht verbreitet hat. Er hat nämlich gezeigt, dafs bei dem Oscilliren sich der Körper sehr häufig in mehrere Theile theilt, welche sämmtlich, jeder für sich, aber gleichzeitig, oscilliren. Je kleiner nun diese Theile sind, desto höher ist in der Regel der Ton; doch hat auch die Gestalt der oscillirenden Theile und ihr Zusammenhang mit dem Ganzen Einflufs darauf, weil dadurch die Kraft, mit welcher sie in ihrer natürlichen Lage erhalten werden, einige Aenderung erleiden kann. Von allen Tönen nun, die derselbe Körper geben kann, mufs einer der tiefste seyn, und diesen nenne ich den G r u n d t o n, die übrigen nenne ich N e b e n t ö n e. Bei dem Grundton ist es klar, dafs seine Höhe lediglich von der Beschaffenheit des oscillirenden Mittels abhängt, und zwar theils von der Spannung, theils von der Masse oder Dichtigkeit desselben: denn jede Veränderung in der materiellen Beschaffenheit, oder in der Gröfse des Körpers, ändert den Grundton, und da die Nebentöne nach bestimmten Gesetzen vom Grundton abhängen, so ist klar, dafs auch bei diesen die Dauer der Oscillationen ganz von der Beschaffenheit des Mittels, in welchem sie statt finden, abhängt. Bekanntlich kann auch die in einer langen Röhre eingeschlossene Luftsäule sich nach der Länge in zwei, drei, vier und mehr gleiche Theile theilen, wodurch ausser dem Grundton in offenen Pfeifen eine Reihe von Tönen nach der harmonischen Scale hervorgebracht wird. In diesem Fall ist bei gleicher Spannung die oscillirende Masse verschieden; also die Dauer der Oscillation wieder von der Beschaffenheit des Mittels abhängig.

Gespannte Saiten haben das eigenthümliche, dafs aufser der ganzen Länge, auch die Hälfte oder ein Drittel u. s. w. oscilliren kann, also aufser dem Grundton noch ein oder ein Paar Nebentöne, aber

nur schwach, mitklingen können. Doch geschieht dieses nicht immer, und wenn der Ton durch Streichen mit dem Bogen erregt wird, wie es mir scheint, nie.

Uebrigens bemerke ich noch, dafs die Nebentöne für unsern Zweck kein besonderes Interesse weiter haben, und dafs zwischen ihnen und den Grundtönen, so fern man sie als ursprüngliche betrachten mufs, kein wesentlicher Unterschied statt findet.

Mitgetheilte Oscillationen.

§. 13. Der wichtigste Unterschied zwischen ursprünglichen und mitgetheilten Oscillationen liegt darin, dafs die Dauer einer mitgetheilten Oscillation, von der Spannung und Dichtigkeit, kurz von der Beschaffenheit des Mittels in welchem sie erregt wird, völlig unabhängig, und in jedem Fall der mittheilenden Oscillation gleichzeitig ist.

Der Grund dieses Gesetzes liegt nicht so tief, dafs er sich nicht auch ohne höhere Rechnung deutlich machen liefse. Man stelle sich eine Reihe körperlicher Punkte A, B, C, D, E u.s.w. vor, welche sämmtlich einander berühren, also unendlich nahe beisammen sind, so ist aus dem oben §. 2. ff. gezeigten klar, dafs sie sämmtlich sich in einem Zustand gegenseitiger Spannung befinden, vermöge deren jeder ein wenig aus seiner Stelle gedrängt werden kann, dann aber allezeit zu derselben wieder zurück zu kehren strebt, und zwar mit desto gröfserer Kraft, je weiter er aus seiner Stelle gedrängt worden. Es macht hierin keinen wesentlichen Unterschied, ob wir uns diese Punkte aus gleichartiger oder aus ungleichartiger Materie bestehend vorstellen wollen. Denn auch ungleichartige Materien, die sich berühren, befinden sich in einer solchen gegenseitigen Spannung, dafs jeder Punkt, der einen Materie, ein wenig nachgeben mufs, wenn er von einem berührenden Punkte der andern gedrückt wird (§. 5.).

Denken wir uns also die Punkte B, C, D, E u.s.w. als gleichartig, und in Ruhe, den Punkt A aber gleichartig oder anderartig, aber in Oscillation gesetzt, so ist klar, dafs der Punkt B, weil er sich von A wegen der vorhandenen Spannung nicht trennen kann, gezwungen ist,

gerade so vorwärts zu gehen, wie *A* geht. Schlägt aber der Punkt *A* zurück, so muſs ihm *B* eben so nachfolgen, also völlig wie *A*, und gleichzeitig mit demselben oscilliren. Was aber *A* auf *B* wirkt, eben das wird *B* auf *C*, *C* auf *D* u. s. f. wirken, und es ist daher klar, daſs alle diese Punkte nach und nach gezwungen werden, gleichzeitig mit *A* zu oscilliren. Daraus folgt indessen nicht, daſs die Oscillationsweiten der Punkte *C*, *D*, *E* u. s. w. eben so groſs als bei dem Punkte *A* seyn werden. Denn die erste Wirkung, welche *A* gegen *B* ausübt, ist in jedem Fall eine Zusammendrückung der hinter *B* liegenden Theile. Hierdurch entsteht ein Widerstand, der selbst die Oscillationsweite von *A* kürzer macht, als sie auſser der Berührung mit *B* im leeren Raume seyn würde, woraus eine allmälige Verkürzung der Oscillationsweiten, aber nicht eine Verkürzung ihrer Dauer entstehen muſs. In der Folge wird sich Veranlassung finden, dieses noch genauer zu erörtern.

§. 14. Was wir im vorigen §. aus bloſsen Begriffen zu erweisen gesucht haben, ergiebt sich auf das unzweideutigste aus einer allgemeinen akustischen Erfahrung. Jedermann weiſs, daſs die Höhe eines Tones nicht die geringste Veränderung leidet, der Ton pflanze sich durch die Luft, auf einem kurzen oder langen Wege fort, er dringe durch dünne oder dicke Wände, oder überhaupt durch Körper von ganz beliebiger Beschaffenheit. Schwächer wird wohl der Ton durch die Fortpflanzung, aber seine Höhe verändert er nicht, also auch nicht die Dauer der Oscillationen.

§. 15. Wenn ich behaupte, daſs eine mitgetheilte Oscillation in Ansehung der Dauer jedes Schlages von der Beschaffenheit des Mittels unabhängig ist, so wird damit nicht gesagt, daſs sie in jeder Beziehung davon unabhängig sei. Es läſst sich in der That in mehr als einer Rücksicht eine Abhängigkeit nachweisen. Besonders gehört dahin die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Oscillationen von Punkt zu Punkt fortpflanzen, denn diese ist von der Geschwindigkeit, mit welcher die oscillirenden Punkte ihre kleine Bahn zurücklegen, völlig unabhängig, und ohne Vergleich gröſser als diese. Diese Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist lediglich eine Function von der im fortpflan-

zenden Mittel herrschenden Spannung. Um dieses deutlich zu machen, ist zuerst einiges über die Geschwindigkeit des Schalles zu sagen.

Von der Geschwindigkeit des Schalles.

§. 16. Alle theoretische Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalles ist unsicher, da Newton's Formel für diese Geschwindigkeit in der Luft, ob ihr gleich die allerstrengste Prüfung keinen Fehler hat nachweisen können, dennoch die absolute Gröfse bedeutend zu klein angiebt. Es ist aber für die wissenschaftliche Begründung des physikalischen Theiles der Akustik dasjenige, was aus Beobachtungen hierüber bekannt ist, völlig hinreichend. Am wichtigsten ist es, die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft zu kennen, da der Schall einem menschlichen Ohre äufserst selten durch ein anderes Mittel als die Luft mitgetheilt wird. Für unsern gegenwärtigen Zweck ist es hinreichend zu bemerken, dafs die Geschwindigkeit des Schalles vollkommen gleichförmig ist, und dafs sie mehr als 1000 Fufs in der Secunde beträgt. Was die Fortpflanzung durch feste Körper betrifft, so ist es zwar viel schwieriger, sie durch Versuche sicher zu bestimmen; indessen haben gelegentlich gemachte Beobachtungen gezeigt, dafs sich der Schall durch feste Körper noch ungleich schneller als durch Luft fortpflanzt. So beobachtete Biot, bei einer gegen 3000 Fufs langen Wasserleitung, die aus zusammengefügten Röhren von Gufseisen bestand, dafs sich der Schall durch dieses Eisen mehr wie zehnmal so schnell als durch die Luft fortpflanzte. Andere Beobachter haben diese Geschwindigkeit durch Holz oder andere feste Körper so schnell gefunden, dafs sich die Geschwindigkeit nicht schätzen liefs.

Diese Beobachtungen, verbunden mit der allgemeinen Erfahrung, dafs hohe und tiefe Töne sich mit völlig gleicher Geschwindigkeit durch die Luft und durch alle Körper fortpflanzen, sind mehr als hinreichend, um die Unabhängigkeit der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit von der Oscillations-Geschwindigkeit aufser allen Zweifel zu setzen.

Beide Arten von Geschwindigkeit lassen sich allgemein auf folgende Art vergleichen. Ein Ton mache in einer Secunde n Schläge, und sein kleiner Oscillationsraum, den er also in $\frac{1}{n}$ Secunde zurücklegt,

sey s. Die Geschwindigkeit des Schalles, also der Weg, den er in einer Secunde zurücklegt, sey c; so legt er in $\frac{1}{n}$ Secunde den Weg $\frac{c}{n}$ zurück. Betrachtet man nun die Bewegung, mit welcher ein oscillirender Punkt seine Bahn durchläuft, als gleichförmig, (was bei einer so kleinen Gröfse verstattet ist), so verhalten sich die in gleichen Zeiten gemachten Wege, wie $s:\frac{c}{n}$. Man betrachte nun einen Ton, dessen Oscillationen ungemein schnell sind, z. B. das viermalgestrichene *c*, welches mehr als 4000 Oscillationen in einer Secunde macht. Man setze $s = 0{,}01$ Zoll, $n = 4000$, und $c = 12000$ Zoll, so verhält sich $s:\frac{c}{n} = 1:300$. Bei einem tiefen Ton wird das Verhältnifs noch viel gröfser.

Da also die Geschwindigkeit der Fortpflanzung von der Oscillations-Geschwindigkeit unabhängig, und so weit die Beobachtungen und Untersuchungen reichen, in jedem Mittel anders ist, so folgt, dafs sie lediglich durch die Beschaffenheit des fortpflanzenden Mittels bestimmt ist.

§. 17. Um die Art, wie sich Oscillationen fortpflanzen, noch anschaulicher zu machen, betrachte man die Fortpflanzung eines Tones durch die Luft, und zwar für jetzt nur in einer einzigen geraden Linie AH Fig. 2.

Zwischen B und C oscillire ein Pnnkt (etwa einer gespannten Saite), der in einer Secunde n Schläge macht. Seine natürliche Stelle sei mitten zwischen B und C in A, und er sei aus derselben auf irgend eine Art bis B zurückgezogen, vor ihm liege aber in der Linie BH ruhende Luft. Es ist nun zu überlegen, was in der Luft geschehen wird, wenn man den Punkt in B losläfst?

Es ist klar, dafs er während der ganzen Bewegung von B bis C gegen die ihn unmittelbar berührende Luft drückt. Jeder Druck bringt aber einige, wenn auch noch so geringe Verdichtung hervor. Die unmittelbar durch den oscillirenden Punkt verdichtete Luft drückt aber nun eben so stätig gegen die ihr nächste, und diese gegen die weiter liegende u. s. w.; kurz, diese Verdichtung pflanzt sich auf der Linie BH schnell von Punkt zu Punkt fort. Die Geschwindigkeit, mit der die Verdichtung fortrückt, ist aber nichts anders als die Geschwindigkeit des Schalles, die wir, wie oben, c nennen. Nun legt der oscil-

lirende Punkt seine kleine Bahn $BC = s$ in $\frac{1}{n}$ Secunde zurück, der Schall aber legt in eben der Zeit den Weg $\frac{c}{n}$ zurück. Man nehme nun an, dafs $CD = DE = EF = FG = GH$ u. s. w. dieser Gröfse $\frac{c}{n}$ gleich sei, so ist klar, dafs in dem Augenblicke, wo der oscillirende Punkt die Gränze C erreicht, die erste Luftverdichtung, die er bei den Anfang seiner Bewegung in B hervorbrachte, bis D fortgerückt, die jenseits D liegende Luft aber noch in Ruhe und in ihrem natürlichen Zustand seyn wird. Hieraus ist nun aber klar, dafs alle Luft, die vorher zwischen B und D ausgedehnt war, nun in dem Raum CD zusammengedrängt, also verdichtet seyn wird. Diese ganze Verdichtung entsteht also dadurch, dafs jeder Punkt derjenigen Luft, die anfangs zwischen B und D enthalten war, eben so, wie der ursprünglich oscillirende Punkt selbst, eine sehr kurze Bewegung gegen D hin gemacht hat. Schlägt nun der oscillirende Punkt von C gegen B zurück, so folgt ihm die bei C befindliche Luft nach, d. h. die verdichtete Luft fängt bei C an, sich zu verdünnen, und diese Verdünnung schreitet eben so schnell, wie vorher die Verdichtung gegen D hin, fort. Da aber die Verdichtung fortfährt, bei D eben so schnell gegen E fortzuschreiten, so ändert sich die Länge der verdichteten Schicht nicht, sondern die Verdichtung, (nicht die verdichtete Luft), rückt nur mit der Geschwindigkeit des Schalles gegen E hin fort. Hat also der oscillirende Punkt wieder die Gränze B erreicht, so befindet sich die Luft-Verdichtung zwischen D und E; dagegen ist die Luft zwischen D und C nun in einem verdünnten Zustand, und dieser entstehet dadurch, dafs jedes anfangs zwischen C und D befindliche Lufttheilchen eine kleine Bewegung gegen B hin gemacht hat.

Man sieht leicht, wie diese Betrachtung weiter fortzusetzen ist. Schlägt der oscillirende Punkt zum zweitenmal von B nach C, so geht die erste Luft-Verdichtung in EF, und die erste Verdünnung in DE über. Bei dem zweiten Rückschlag kommt die erste Verdichtung in FG, die erste Verdünnung in EF, die zweite Verdichtung in DE, und eine dritte Verdünnung in CD u. s. f.

Es müssen also längs der ganzen Linie BH lauter abwechselnde Schichten von verdichteter und verdünnter Luft entstehen, und dieses wenigstens so weit, als der durch den oscillirenden Punkt erregte

Schall hörbar ist. In jeder Verdichtung oscilliren die Punkte der Luft vorwärts, in jeder Verdünnung rückwärts. Die Länge der Verdichtungen oder Verdünnungen ist $\frac{c}{n}$; also, da c eine beständige Gröfse ist, blofs eine Function von n, d. i. von der Anzahl der Schläge, die der Ton in einer Secunde macht; also von der Zeit oder Dauer einer Oscillation, aber ganz und gar nicht von der Oscillationsweite BC. In eben dem Maafse aber, in welchem BC gröfser oder kleiner ist, sind auch die Räume, innerhalb deren jedes Luft-Theilchen oscilliret, gröfser oder kleiner. Doch werden wir in der Folge sehen, dafs die Oscillationsweiten der Luft-Theilchen nach einem bestimmten Gesetz, mit der Entfernung von den ursprünglichen Oscillationen kürzer werden müssen.

Von der Verbreitung des Schalles in der Luft.

§. 18. Wir haben im vorhergehenden gesehen, wie sich die Oscillationen in einer einzigen geraden Linie fortpflanzen; jeszt ist zu untersuchen, ob, und auf welche Art sie sich von einem einzigen Punkte aus seitwärts verbreiten.

In C Fig. 3 befinde sich ein körperlicher Punkt, der zwischen den Gränzen A und B ursprünglich oscilliret. Wir haben bemerkt, dafs so wie er von A gegen B schlägt, die vor ihm liegende Luft zusammengedrückt wird. Diese Verdichtung entsteht aber offenbar nicht erst dann, wenn der oscillirende Punkt den Weg AB schon zurück gelegt hat, sondern in jedem Punkte des Raumes AB dauert die Verdichtung der vorliegenden Luft stätig fort. Verdichtete Luft aber strebt in jedem Fall, sich nach allen Seiten auszudehnen; daher werden sich die Oscillationen nicht blofs in der verlängerten Richtung AB, (also in AN) fortpflanzen, sondern in allen Richtungen, wohin man von den Punkten des Raumes AB aus, eine gerade Linie ziehen kann. Da aber AB in jedem Fall ungemein klein ist, so reicht es hin, alle Richtungen, als von der Mitte C ausgehend zu betrachten. Zieht man also CM in beliebiger Richtung, so müssen in dieser die verdichteten und verdünnten Luftschichten, gerade so wie in der Richtung CN wechseln. Da nun eben dieses von jeder Linie gilt, die man von C aus in der

Luft ziehen kann, so sieht man leicht ein, dafs sich diese Verdichtungen und Verdünnungen, in der Gestalt concentrischer Kugelschichten von C aus verbreiten werden. In der Figur ist angenommen, dafs die Linien CD, DE, EF, FG gleich sind, und die oben bestimmte Länge einer Verdichtung oder Verdünnung vorstellen; dafs ferner aus C durch D, E, F, G u. s. w. Kugelflächen $d\delta$, $e\varepsilon$, $f\phi$, $g\gamma$ u. s. w. gelegt sind, und dafs endlich sich zwischen C und $d\delta$ eine Verdünnung, zwischen $d\delta$ und $e\varepsilon$ eine Verdichtung u. s. f. befinde.

Eine solche kugelförmige Verdichtungs-Schicht wie $d\delta e\varepsilon$ oder $f\phi g\gamma$, nebst der ihr folgenden Verdünnung $Cd\delta$ oder $e\varepsilon f\phi$ u. s. w. nennt man eine Schall-Welle, die Länge einer Verdichtung und Verdünnung zusammen, wie CE oder EG, das Maafs oder die Breite einer Schall-Welle, endlich jede aus C gezogene Linie, wie CN oder CM, einen Schall-Stral. Dafs die Breite jeder Schall-Welle $= \frac{2c}{n}$ sei, ist aus §. 17. klar.

§. 19. Auf diese Art hat es gar keine Schwierigkeit, nicht nur deutlich, sondern auch anschaulich zu machen, was bei der Verbreitung des Schalles von einem Punkte aus, in der Luft geschieht. In der Wirklichkeit kommt aber nie der Schall aus einem einzigen Punkte; doch begreift man leicht, dafs eine starke Annäherung an die gegebene Vorstellung statt finden müsse, wenn entweder die ursprünglich oscillirenden Punkte sich innerhalb eines kleinen Raumes befinden (z. B. in der Oeffnung eines Blase-Instrumentes, aus welcher der Schall hervortritt), oder wenn dieser Raum zwar von einiger Ausdehnung ist, wie bei Saiten-Instrumenten, der Hörer sich aber in solcher Entfernung befindet, dafs er die ganze Länge unter einem ziemlich kleinen Winkel sehen würde.

Verwickelter wird aber die Sache, wenn sich das Ohr nahe bei der Quelle eines solchen Schalles befindet. Es sei Fig. 4, AB eine tönende Saite, in C befinde sich ein Ohr, so ist klar, dafs ein Luft-Theilchen in C von jedem Punkt der Saite einen Schall-Stral, wie AC, DC, IC, BC u. s. w. erhält. In jeder solchen Richtung erhält also der Punkt C einen Oscillationsschlag; da aber alle diese Stralen von sehr verschiedener Länge sind, so wird der Punkt C in einigen derselben in einer Verdichtung, in andern in einer Verdünnung zu liegen

kommen, d. h. er wird in einigen Stralen einen Stofs erhalten in der Richtung gegen die Saite, in andern hingegen abwärts. (§. 17). Der Anstofs den *C* erhält, ist also in der That sehr zusammengesetzt, und es würde nicht ganz leicht seyn, aus allen diesen Anstöfsen die Richtung des zusammengesetzten Stofses zu berechnen. Es ist indessen die Bestimmung dieser Richtung in akustischer Hinsicht nicht wichtig. Es ist völlig hinreichend zu wissen, dafs alle Schläge, die der Punkt *C* erhält, gleichzeitig sind, und dafs daher auch das Ergebnifs aller dieser Schläge nichts als eine einzige gleichzeitige Oscillation seyn könne, wie sich leicht aus den ersten Begriffen von der Zusammensetzung jeder beliebigen Art von Bewegungen deutlich machen läfst. In welcher Richtung diese zusammengesetzten Oscillations-Schläge das Ohr treffen, ist für die Höhe des Tones gleichgültig.

Ob man unter solchen Umständen noch von regelmäfsigen Schall-Wellen reden könne, ist nicht leicht deutlich zu machen; und diese Betrachtung mag wohl der Grund seyn, warum Lagrange in mehreren Stellen seiner *Recherches*, die Vorstellung von Schall-Wellen, die zuerst Newton aufgestellt hatte, gänzlich verwirft, obgleich ihre Realität unbestreitbar ist, sobald man den Schall, als von einem Punkte, oder auch von einem kleinen Raume ausgehend, betrachtet.

§. 20. Noch verwickelter wird das Spiel der Oscillationen, wenn eine Menge von verschiedenen Tönen zugleich klingen. Auf Anschaulichkeit mufs man dabei gänzlich Verzicht thun. Aber der Verstand reicht weiter als die Einbildungskraft oder das Anschauungs-Vermögen: denn er vermag, Deutlichkeit in die verwickeltsten Erscheinungen zu bringen, welche die Einbildungskraft nicht vermögend ist, in ein anschauliches Bild zusammen zu fassen, wofern er nur im Stande ist, die einfachen Bestandtheile der Erscheinung auf deutliche Begriffe zu bringen. Es kommt nämlich hierbei auf die Anwendung eines Satzes an, der aus den ersten Begriffen der Bewegungslehre deutlich hervorgeht, wenn diese Lehre rein mathematisch und von allen physikalischen Begriffen abgesondert vorgetragen wird. Legt man nämlich einem Punkte vielerlei relative Bewegungen (z.B. dem Punkte *C* Fig. 4 in den Richtungen *AE*, *DF*, *IG*, *BH* etc.) mit gegebenen Geschwindigkeiten bei, und bestimmt dar-

aus seine absolute Richtung und Geschwindigkeit, so ist es in jedem Fall absolut einerlei, ob man sagt, der Punkt habe die einzige absolute Bewegung, oder er habe alle die einzelnen Bewegungen, die man ihm in Beziehung auf die gegebenen Richtungen beilegt. Man darf daher in jedem Fall beide Vorstellungsarten, ohne einen Irthum zu besorgen, vertauschen. Aus diesem Satze folgt aber, dafs man bei der Zusammensetzung noch so vieler Bewegungen, dennoch jede einzelne für sich so betrachten kann, als ob sie ganz allein da wäre.

Wendet man diesen Satz auf unsern Gegenstand an, so ist man berechtigt, jeden Schall-Stral, der durch C geht, z.B. IG so zu betrachten, als ob er ganz allein da wäre; d.h. man kann und mufs annehmen, dafs in jedem Punkte C dieses Strales die Oscillations-Bewegung wirklich realisirt sei, die an dieser Stelle statt finden würde, wenn er ganz allein da wäre. Denn obgleich seine absolute Bewegung in diesem Punkte ganz anders seyn mag, so ist doch in derselben die Wirkung derjenigen Oscillation mit enthalten, die er in dem einzigen Stral, wenn dieser allein da wäre, erhalten würde.

Hieraus wird auch begreiflich, obgleich nicht anschaulich, dafs wenn das Ohr in C nicht gleichzeitige, sondern Oscillationen von verschiedener Dauer, also von verschiedenen Tönen erhält, man jederzeit berechtigt sei zu behaupten, das Ohr werde von jeder Oscillation gerade so gerührt, als ob sie ganz allein da wäre.

Um indessen die Kräfte der Phantasie bei diesen Ansichten nicht ganz ungenutzt zu lassen, so giebt uns die Natur ein recht lehrreiches und anschauliches Bild von einer Verbindung vieler Bewegungen, die sich auf die mannigfaltigste Art durchkreuzen und schneiden, ohne dafs eine die andere stört, in den kreisförmigen Wellen, welche auf der Oberfläche eines ruhigen Wassers entstehen, wenn man kleine Körper hineinwirft. Man sieht leicht, dafs die Benennung von Schall-Wellen, von dieser Erscheinung entlehnt ist.

Zurückwerfung des Schalles.

§. 21. Auch hier mufs die Betrachtung von den einfachen Bestandtheilen der Erscheinung ausgehen. Es sei also in C Fig. 5. die

ursprüngliche Quelle eines Schalles, *AB* sei die Oberfläche irgend eines festen (oder auch flüssigen) Körpers, und auf den Punkt *D* derselben falle der Schall-Stral *CD*. Da wir oben gezeigt haben, daſs alle körperliche Materie ohne Ausnahme die Eigenschaften besitzt, durch welche Oscillationen möglich werden, (Preſsbarkeit und Spannkraft), so muſs der Punkt *D* durch die Schläge des äuſsersten Luft-Theilchens in dem Stral, nothwendig in gleichzeitige Oscillationen versetzt werden. Hierbei wirken die Schläge der Luft nicht anders als jede andere mechanische Kraft, auf *D*, d.h. man wird die Oscillationen dieses Punktes als ursprüngliche betrachten können. Es wird folglich durch dieselben die Luft gerade so, wie §. 18. in Oscillationen versetzt, die sich nach allen Seiten verbreiten, wohin man nur von *D* aus eine gerade Linie ziehen kann. Es spaltet sich folglich der Stral *CD* in unendlich viele Stralen. Man kann also nicht sagen, wie man oft angenommen hat, daſs der Stral *CD*, von dem Punkte D in einer einzigen Richtung, nach den Gesetzen des elastischen Stoſses reflectirt werde, so daſs der zurückgeworfene Schall in der einzigen Richtung *DE* fortgehe, wenn man den Winkel $BDE = ADC$ macht.

Würde der Schall auf solche Art zurückgeworfen, so geschähe es eben so, wie ein Lichtstral *CD* von einer polirten Fläche *AB* zurückgeworfen wird. Dieses ist schon deswegen als allgemeiner Satz höchst unwahrscheinlich, da die Fläche *AB*, in Beziehung auf bewegte Lufttheilchen, gar nicht als polirt angesehen werden kann; was doch ohne Zweifel nöthig ist, wenn so kleine Bewegungen, als Oscillationen sind, in einer so genau bestimmten Richtung zurückgeworfen werden sollten. Dagegen hat die Zurückwerfung des Schalles die gröſste Aehnlichkeit mit der Art, wie ein Lichtstral von einer unpolirten Fläche reflectiret wird. Denn ist *CD* ein Lichtstral, so zerstreut sich auch das Licht nach allen Seiten.

§. 22. Es giebt indessen manche Erscheinungen, welche doch eine Reflexion nach den Gesetzen des elastischen Stoſses vorauszusetzen scheinen: aber diese lassen sich ohne Schwierigkeit erklären, wenn man annimmt, daſs die Zurückwerfung des Schalles mit der Zerstreuung des Lichtes völlig gleiche Gesetze befolge. Man darf nämlich eine nur einigermaaſsen ebene Fläche sehr schräge gegen ein lebhaftes Licht

halten, um sich zu überzeugen, dafs das zerstreute Licht nicht in allen Richtungen von gleicher Stärke ist. Am lebhaftesten ist es immer in der Richtung *DE*; auch wird es lebhafter, je kleiner die Winkel *ADC* und *BDE* sind. Nimmt man nun an, dafs es sich bei der Reflexion des Schalles eben so verhalte, so wird dadurch manche Erklärung akustischer Erscheinungen an Ungezwungenheit gewinnen.

§. 23. Es erklären sich hieraus sehr befriedigend die Erscheinungen des Wiederhalles und des Echo.

Der Wiederhall entstehet allezeit, und unvermeidlich, in eingeschlossenen Räumen von einigem Umfang, und es hat damit folgende Bewandnifs. Es sei *AB* Fig. 6. die Wand eines Zimmers; in *C* sei die ursprüngliche Quelle eines Schalles; in *D* befinde sich das Ohr. Unter diesen Voraussetzungen erhält das Ohr den Schall unmittelbar nur durch den Stral *CD*. Da aber auch jeder Punkt der Wand, wie *A, E, F, G* von *C* aus einen Stral erhält, von jedem solchen Punkte aber der Schall nach allen Seiten zurückgeworfen wird, so erhält das Ohr auch durch unendlich viele reflectirte Stralen, *AD, ED, FD, GD,* gleichzeitige Oscillationsschläge. Nun mufs zwar jeder einzelne zurückgeworfene Stral weit schwächer seyn, als jeder ursprüngliche. Aber was jedem einzelnen an Stärke abgeht, wird vollkommen durch ihre unendliche Menge ersetzt. Denn in der That bekommt das Ohr von jedem Punkte der Wände, von wo man zwei freie Linien, die eine nach *C*, die andere nach *D* ziehen kann, einen reflectirten Stral.

Diese Stralen verstärken den Schall beträchtlich, so fern man annehmen kann, dafs ihre Oscillationen zugleich, oder in äufserst kleinen Zwischenzeiten, zum Ohr kommen. Diese Annahme findet aber blofs in kleinen Räumen statt. Es ist nämlich klar, einmal: dafs reflectirte Oscillationen sich eben so schnell als ursprüngliche in der Luft fortpflanzen; und dann: dafs der Weg jedes reflectirten Schalles, z. B. $CG + GD$ gröfser ist, als der Weg des ursprünglichen *CD*. Folglich kommt jede reflectirte Oscillation später nach *D*, als die ursprüngliche. Bei der grofsen Geschwindigkeit der Fortpflanzung aber ist in Zimmern von mäfsiger Gröfse der Unterschied der Zeit, in welcher die ursprünglichen und reflectirten Stralen in das Ohr kommen, so klein, dafs er

unserm Gefühl für Einen Augenblick gelten kann. Denn wäre auch z. B. der Weg $CE + ED$ um 50 Fufs länger als CD, so legt der Schall diese 50 Fufs in $\frac{1}{20}$ Secunde zurück, welches für das Ohr so gut als ein Augenblick ist.

In grofsen Sälen hingegen kann der Fall vorkommen, dafs der Weg der reflectirten Stralen, den der ursprünglichen um 100 und mehr Fufs übertrifft; dann gewinnt ein augenblicklicher Schall eine bemerkbare Dauer, und dieses ist es, was man den Wiederhall nennt.

§. 24. Gänzlich vermeiden kann man in umschlossenen Räumen den Wiederhall nie, und er kann da, wo öffentlich gesprochen werden soll, sehr beschwerlich werden. Denn, wird z. B. der Klang einer einzigen Sylbe durch den Wiederhall in den Zeitraum zweier Sylben ausgedehnt, wozu eben keine sehr lange Dauer des Wiederhalles erforderlich ist, so begreift man leicht, dafs dadurch die Rede unverständlich werden mufs, weil man die zweite Sylbe schon höret, während die erste noch nicht verklungen ist.

Vermindern kann man den Wiederhall hauptsächlich durch eine schickliche Gestalt des Saales. Die lange und schmale Gestalt fast aller unserer Kirchen und Säle, die zu öffentlichen Vorträgen bestimmt sind, ist unter allen die man wählen kann, die ungünstigste, nicht blofs deswegen, weil der reflectirte Schall in manchen Richtungen einen sehr langen Weg machen mufs, sondern auch, weil zwischen den langen Seitenwänden, wegen ihrer geringen Entfernung von einander, eine doppelte oder mehrfache Reflexion entstehen kann. Bisweilen kann der Sprechende dadurch den Wiederhall unschädlicher machen, dafs er nicht sehr laut, aber langsam und deutlich spricht. Denn je stärker die Sprache ist, desto lauter spricht auch der Wiederhall mit. Aus Erfahrung und Gründen scheint die Gestalt, welche sich der quadratischen nähert, die vortheilhafteste zu seyn.

Für die Musik ist der Wiederhall, wenn er nur nicht allzustark ist, eher vortheilhaft als nachtheilig.

§. 25. Vom Wiederhall unterscheidet sich das Echo nur dadurch, dafs zwischen dem ursprünglichen und reflectirten Schall eine bemerkbare Zeit verstreicht.

In den meisten Fällen läfst sich das Echo aus den Gesetzen des elastischen Stofses nicht erklären. Dagegen lassen sich die Bedingungen der Entstehung aus der vorgetragenen Theorie ungezwungen, und auf eine mit der Erfahrung völlig einstimmige Art erklären. Die Bedingungen des Entstehens eines einfachen Echo sind folgende.

Man denke sich im Freien um den Ort eines Beobachters zwei grofse Kreise beschrieben; den kleineren mit einem Halbmesser von einigen hundert Fufsen; wir wollen 300 annehmen; den anderen mit einem 25 Fufs gröfsern. Den innern Raum des kleinern Kreises denke man sich ziemlich eben und frei von hohen Gegenständen. In dem Zwischenraum beider Kreise aber befinden sich in beliebigen Lagen kleine Gruppen hoher Gegenstände, Häuser, Mauern, Felswände, Bäume, hohes Gebüsch und dergleichen. Unter diesen Voraussetzungen mufs der Beobachter ein deutliches Echo nach etwas mehr als einer halben Secunde hören. Denn von den 300 Fufs entfernten Gegenständen hat der zurückgeworfene Schall einen Weg von 600 Fufs, von den 325 Fufs entfernten, einen Weg von 650 Fufs zu machen. Jener wird ungefähr in 0,60, dieser in 0,65 Secunden zurückkommen. Der Unterschied von 0,05 ist klein genug, um allen reflectirten Schall als einen augenblicklichen zu empfinden, und man hört ihn ungefähr 0,6 Secunden nach dem ursprünglichen.

Man sieht hieraus, dafs zur Entstehung eines Echo ausgedehnte Flächen gar nicht nothwendig sind, und dafs, wie die Erfahrung vielfältig lehrt, Waldungen von einer schicklichen Lage ein sehr gutes Echo machen können, indem jede Oberfläche, auf welche der Schall trifft, wäre es auch nur die Oberfläche eines leichten Blattes, zurückkehrende Oscillationen hervorbringt. Auch ist klar, dafs gar nicht nothwendig der ganze Zwischenraum der beiden angenommenen Kreise mit hohen Gegenständen besetzt sein mufs. Sie können in ganz beliebiger Ordnung und Stellung, und gruppenweise stehen, wofern nur die reflectirenden Punkte zahlreich genug sind, um den zurückkehrenden Schall bemerklich zu machen.

§. 26. Ein doppeltes oder mehrfaches Echo kann auf mehr als eine Art entstehen. Man denke sich in dem Zwischenraum

der beiden angenommenen Kreise zwei hinlänglich ausgedehnte Gruppen von Gegenständen einander gerade gegenüber, so erhält man das erste Echo, wie vorher, nach 0,6 Secunden; aber der beiderseitige Schall geht nun über den Ort des Beobachters hinaus nach der gegenüberstehenden Gruppe, und kehrt nun als zweites Echo, 1,2 Secunden nach dem ursprünglichen Schall zurück. Ist das zweite Echo noch lebhaft genug, so kann eben so ein drittes u. s. w. entstehen. Oder man denke sich, aufser den beiden angenommenen Kreisen, noch zweie, mit Halbmessern von 600 und 625 Fufs beschrieben. Befinden sich in den Zwischenräumen der letztern an einer oder mehr Stellen, Gruppen von Gegenständen, und zwar gerade an solchen Stellen, wo der Zwischenraum der kleineren Kreise leer ist, so hört der Beobachter, 0,6 Secunden nach dem ursprünglichen Schall, das erste Echo von den näheren, und nach 1,2 Secunden ein zweites von den entfernteren Gegenständen. Man sieht leicht, wie mancherlei Abänderungen dabei statt finden können.

§. 27. In elliptischen Sälen hört man bekanntlich einen Schall, der in dem einen Brennpunkte entsteht, in dem andern Brennpunkte deutlicher und stärker, als an jeder andern Stelle. Es ist möglich, aber gar nicht nothwendig, dieses aus einer Zurückwerfung des Schalles nach den Gesetzen des elastischen Stofses zu erklären. Zur Erklärung genügt es schon zu bemerken, dafs (wegen einer bekannten Eigenschaft der Ellipse) aller Schall, der von einem Brennpunkt zum andern durch Zurückwerfung gelangt, einen gleich langen Weg, von der Länge der grofsen Achse zu machen hat. Jeder augenblickliche Schall, der in dem einen Brennpunkt erregt wird, kommt eigentlich doppelt im andern Brennpunkte an, einmal unmittelbar, und dann auch durch Zurückwerfung von den Wänden; aber (wenn der elliptische Raum nicht viele hundert Fufs lang und breit ist), so schnell hinter einander, dafs das Ohr nur einen Schall hören wird. Hierzu kommt, dafs der unmittelbare Schall, der nur von sehr wenigen Schallstralen herrührt, weit schwächer seyn dürfte, als der von unendlich vielen Stralen herrührende reflectirte. Der zweite Schall würde eben so augenblicklich seyn als der erste, wenn der ganze Cubik-Raum die Gestalt eines länglichen Ellipsoides hätte. Haben aber nur die Wände

eine elliptische Krümmung, so wird der Wiederhall von den obern Theilen derselben allerdings etwas später als von den untern im zweiten Brennpunkt anlangen.

Diese Erscheinung macht übrigens doch die oben §. 22 bemerkte Hypothese, daſs der reflectirte Schall in der Richtung, wohin ein Lichtstral von der Spiegelfläche gehen würde, am stärksten sei, ziemlich wahrscheinlich. Denn auf diese Art wird der Schall im zweiten Brennpunkte nicht nur fast augenblicklich, sondern auch stärker als in andern Stellen anlangen.

Sehr entscheidend für das §. 21 aufgestellte Hauptgesetz ist die Erfahrung, daſs auch in groſsen kreisförmig ummauerten Räumen, besonders unter einer halbkugelförmigen Kuppel, etwas ähnliches statt findet, indem zwei Personen die einander gegenüber, und fast um den ganzen Durchmesser von einander entfernt stehen, sich ziemlich leise mit einander unterhalten können, wenn der Sprechende gegen die nahe Wand redet. Es dürfte schwerlich möglich seyn, diese Erscheinungen aus Reflexionen nach den Gesetzen der Spiegelung zu erklären. Vergleicht man aber die Längen der Wege, auf welchen der Schall von einem Endpunkte des Durchmessers zu dem andern gelangen kann, so läſst sich zeigen, daſs der Unterschied des längsten und kürzesten Weges sehr wenig mehr als 0,4 des Durchmessers beträgt. Setzt man diesen 120 Fuſs, so ist dieser Unterschied ungefähr 48 Fuſs. Hieraus läſst sich aber leicht berechnen, daſs aller von dem Kugelgewölbe reflectirter Schall, fast in einem Augenblick (nämlich in weniger als $\frac{1}{20}$ Secunde) am andern Endpunkte des Durchmessers anlangt. Irre ich nicht, so ist dieses die einzig mögliche Art, diese Erscheinung befriegend zu erklären.

Von der Stärke des Schalles.

§. 28. Zuerst müssen wir ganz im Allgemeinen überlegen, wovon die Stärke des Schalles abhängig sei, wobei wir uns wieder auf den Schall in der Luft beschränken, weil ein menschliches Ohr selten oder nie den Schall durch ein anderes Mittel erhält, und weil das, was in Ansehung der Luft zu bemerken ist, sich leicht auch auf andere Mittel anwenden läſst.

Unmittelbar kann unstreitig die Stärke des Schalles, so fern man einen einzigen Schallstral betrachtet, von nichts abhängen, als von der Lebhaftigkeit oder Kraft, mit welcher die Oscillationsschläge der Luft das Trommelfell des Ohres treffen. Es ist aber aus den ersten Elementen der Mechanik bekannt, dafs sich die Kraft der Bewegungen bei gleicher Geschwindigkeit, wie die bewegten Massen, und bei gleichen Massen, wie die Geschwindigkeiten verhalte. Es entsteht also nun die Frage, wie die Begriffe von Masse und Geschwindigkeit auf oscillirende Bewegungen angewendet werden können.

§. 29. Körperliche Massen, welche sich Oscillationen mittheilen, befinden sich allezeit in Berührung mit einander. Es scheint daher nöthig, erst die Vorstellung einer Berührung auf deutliche Begriffe zurück zu führen.

Wenn sich zwei gleichartige oder ungleichartige körperliche Flächen berühren, so kann man mit gleichem Rechte sagen, die Berührung geschehe in einer oder in zwei Flächen. Denkt man sich nämlich an der Stelle, wo man eine Berührung betrachtet, eine blofs geometrische Fläche, so kann man sagen: die Berührung geschehe in dieser einzigen Fläche. Erwägt man aber, dafs diese geometrische Fläche zwei Seiten hat, deren eine diesseits, die andere ganz jenseits liegt, und von denen jede wieder mit einer der angenommenen körperlichen Oberflächen zusammen fällt, so kann man sagen, die Berührung geschehe in diesen beiden Flächen. Nun kann man aber jede Fläche vorstellen als einen Körper von unendlich kleiner Dicke; daher kann man eben so richtig sagen: dafs die sich berührenden Massen zwei körperliche Schichten oder Scheiben sind, denen man gleiche, aber unendlich kleine Dicken beilegen kann. Hierdurch entstehet der Begriff eines Volumens, auf welches sich der Begriff der Masse bestimmt anwenden läfst.

Das Volumen zweier sich berührenden Scheiben mufs aber in der Regel als gleich betrachtet werden: denn dafs sie in Länge und Breite congruent sind, ist unmittelbar klar; legt man ihnen aber auch noch zwar unendlich kleine, aber gleiche Dicke bei, so sind alle Bedingungen der Congruenz vollständig vorhanden. Haben aber die sich berührenden Scheiben gleiches Volumen, so verhalten sich ihre Massen

wie ihre Dichtigkeiten. Und aus dieser Betrachtung ergiebt sich das Recht, diese statt der Massen zu setzen.

Um keiner Dunkelheit Raum zu lassen, bemerke man noch folgendes. Es macht einen zwar nur unendlich kleinen, aber dennoch nicht zu übersehenden Unterschied in der Anwendung des Begriffes der Masse, ob man die sich berührenden Scheiben als ebene, oder ob man sie als gekrümmte betrachtet. Im ersten Fall ist das Volumen derselben absolut congruent. Denkt man sich aber zwei sich berührende concentrische Kugelschichten, so ist die vom Mittelpunkt entferntere allerdings gröfser als die nähere. Betrachtet man aber ihre Dicke als ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, so ist der Unterschied des körperlichen Volumens von der zweiten Ordnung, und kann daher in der Regel mit vollkommenem Rechte als Null betrachtet werden. Doch würde die stätige Zunahme des Volumens, wenn man sich den Halbmesser einer Kugel als stätig wachsend vorstellt, nicht auf deutliche Begriffe zu bringen seyn, wenn man diesen Unterschied unbeachtet liefse.

Was hier von berührenden Flächen gesagt worden, findet auch Anwendung auf berührende Punkte. Man kann sie in jedem Fall als zwei unendlich kleine Körper von gleichem Volumen vorstellen, deren Massen sich folglich wie ihre Dichtigkeiten verhalten. Doch findet auch hier der eben erörterte Unterschied statt, ob man die beiden sich berührenden Punkte vorstellt, als einer Ebene, oder als einer gekrümmten Fläche angehörig.

§. 30. Was aber die Geschwindigkeit betrifft, so ist schon oben (§. 8.) bemerkt worden, dafs die Geschwindigkeit einer Oscillation in jedem Punkte des Oscillations-Raumes eine andere ist. Nun sind aber alle Oscillationen, welche einen Ton erregen, so schnell, dafs jeder Schlag für einen Augenblick gelten mufs. Legt also ein oscillirender Punkt der Luft, welcher in einer Secunde n Schläge macht, in dem kleinen Zeitraum einer $\frac{1}{n}$ Secunde den äufserst kleinen Raum s zurück, so ist es für unser Gefühl einerlei, ob der fast augenblickliche Schlag den Weg s in der Zeit $\frac{1}{n}$ Secunde gleichförmig oder ungleichförmig zurücklegt. Betrachten wir nun die Bewegung als gleichförmig, so verhält sich die Geschwindigkeit, alles übrige gleich gesetzt, wie der Oscilla-

tions-Raum *s*. Hieraus folgt also das zweite Gesetz: dafs bei unveränderter Dauer der Oscillationen, d. i. bei gleichbleibender Höhe eines Tones, die Stärke desselben sich wie die Gröfse der Oscillationsweite verhält.

Auch dieses Gesetz bestätigt sich durch eine sehr einfache und allgemein bekannte Erfahrung. Wenn man eine angeschlagene Saite, oder noch besser eine oscillirende Stimmgabel verklingen läfst, so ändert sich die Höhe des Tones auf keine dem geübtesten Ohr bemerkbare Art, d. h. die Dauer der Oscillationen bleibt gleich; aber die Oscillationsweiten werden immer kleiner, und mit ihnen nimmt zugleich die Stärke des Tones ab.

§. 31. Hieraus ergiebt sich nun, dafs die Abnahme des Schalles mit der Entfernung von der Quelle des Schalles, von nichts anderem herrühren könne, als davon, dafs die Oscillationsweiten bei Verbreitung des Schalles mit der Entfernung immer kürzer werden; denn die Dichtigkeit der Luft könnte nur dann einigen Einflufs haben, wenn der Schall aus sehr grofsen Höhen nach der Tiefe, oder umgekehrt fortginge. Die ersten Elemente der rein mathematischen Bewegungslehre sind völlig hinreichend, die Ursache und das Verhältnifs dieser Abnahme genau zu bestimmen.

Man betrachte wieder Fig. 3, und erinnere sich alles dessen, was §. 18. über die Verbreitung des Schalles durch die Luft gesagt worden. Unter CN lege man einen Winkel $NCO = NCM$, und stelle sich unter CN die Achse eines Kegels MCO vor, dessen Spitze in C liegt. Dieser Kegel umfasset alle Schall-Stralen, die sich von C aus innerhalb seines Raumes ausbreiten können. Man wähle auf einer der von C aus gezogenen Linien, etwa auf CN, zwei Punkte H und K beliebig, und lege durch diese aus dem Mittelpunkt C zwei Kugelflächen, von welchen die in den Kegel fallenden Stücke PQ und RS kreisförmige Abschnitte sind. In jedem dieser Abschnitte befinden sich alle Punkte der Luft in gleicher und gleichzeitiger Oscillation; und zwar, wenn PQ in einer Verdichtung liegt, von C abwärts; wenn aber RS in einer Verdünnung liegt, gegen C hinwärts. Nun kann, nach den Grundlehren der Mechanik, kein Körper mehr Bewegung mittheilen, als er selbst hat,

woraus folgt, dafs in der kreisförmigen Fläche PQ nicht mehr oder weniger Bewegung seyn kann, als in RS. Da nun die oscillirenden Massen in beiden Flächen gleiche Dichtigkeit haben, so kann der Foderung, dafs in PQ und RS gleichviel Bewegung seyn soll, nur dadurch Genüge geschehen, dafs die Oscillationsweiten in RS in demselben Verhältnifs kleiner sind, als in PQ, in welchem die Fläche RS gröfser ist als PQ. Nun stehen diese Flächen im geraden Verhältnifs mit den Quadraten der Halbmesser CH und CK; folglich mufs die Gröfse der Oscillationsweiten, und mit ihnen die Stärke des Schalles im umgekehrten Verhältnifs mit den Quadraten der Entfernung stehen.

§. 32. Da wir bei dem Beweise vorausgesetzt haben, dafs der Schall von dem einzigen Punkte C ausgehe, so ist klar, dafs es in voller Strenge auch nur für diesen idealischen Fall gelte. Verbreitet sich aber ein Schall von mehreren Punkten, das Ohr hat aber eine solche Stellung, dafs man ohne erheblichen Fehler sagen kann: es sei von jedem schallenden Punkte gleichweit entfernt, so befolgt die Stärke des Schalles in jedem Stral den das Ohr erhält, dieses Gesetz, und so wird das Gesetz auch unter diesen Voraussetzungen anwendbar bleiben. Dieses wird also der Fall seyn, wenn entweder der Raum aus welchem der Schall kommt, wirklich sehr klein, oder wenn er wenigstens im Verhältnifs gegen die Entfernung des Ohres klein ist.

Kommt dagegen der Schall aus mehreren Punkten, deren Entfernung vom Ohr sehr verschieden ist, wie wenn z. B. AB Fig. 4. eine schallende Saite, in C aber das Ohr wäre, so würde es zwar nicht unmöglich, aber doch immer etwas schwierig seyn, die Stärke des Schalles in C zu bestimmen, weil man dazu die Oscillationsweite des Luft-Theilchens C berechnen müfste, welche das Resultat aller Oscillationsschläge ist, welche der Punkt C durch alle von AB kommenden Stralen erhält. Indessen ist eine genauere Schätzung der Stärke des Schalles unter diesen Umständen selten oder nie ein Bedürfnifs, und es ist hinreichend, nur zu bemerken, dafs der Schall um so stärker wird, je gröfser die Anzahl der Punkte ist, von welchen das Ohr in C Schall-Stralen erhält. Welches dritte Gesetz,

ungeachtet seiner Unbestimmtheit, demohngeachtet sorgfältig zu bemerken ist, weil man es zur richtigen Beurtheilung vieler Erscheinungen nicht entbehren kann.

§. 33. Mit dieser Theorie von der Stärke des Schalles müssen wir eine sehr merkwürdige und lehrreiche Beobachtung des Herrn Biot verbinden. An eben der cylindrischen gegen 3000 Fuſs langen Röhre von Guſseisen, die schon oben (§. 16.) erwähnt worden, beobachtete er, daſs der leiseste Schall (z. B. das Schlagen der Unruhe einer Taschenuhr) an dem anderen Ende, ungeachtet der groſsen Entfernung, so ungeschwächt gehört wurde, als ob man dichte dabei wäre.

Dieser Erfolg konnte nur statt finden, wenn die Oscillationsweiten die ganze Röhre hindurch von gleicher Gröſse blieben. Von gleicher Gröſse aber konnten sie nur bleiben, wenn sie sich nicht ausbreiteten, und selbst nicht der innern Fläche des Eisens Oscillationen mittheilten. Dieses führt aber nothwendig zu der Folgerung, daſs die Schallstralen längs der ganzen Röhre parallel mit der Achse fortgingen; desgleichen, daſs Schallstralen die einer Fläche parallel laufen, derselben keine, oder unmerklich wenig Oscillations-Bewegung mittheilen.

§. 34. Diese Folgerungen werfen wieder Licht auf die Theorie der Sprach- und Hör-Röhre, an deren Gestalt man so viel, aber ohne allen Erfolg gekünstelt hat, weil man dabei von einer Reflexion der Stralen nach katoptrischen Gesetzen ausging.

Die Erklärung der Wirkungen des Sprachrohrs ist ganz einfach folgende. In einer etwas langen kegelförmigen Röhre, deren entgegengesetzte Seiten nur unter einem kleinen Winkel divergiren, werden die Schallstralen verhindert, sich seitwärts auszubreiten, und gezwungen, fast parallel zu bleiben. Die äuſsersten Stralen laufen parallel längs den Wänden, und theilen denselben wenig oder gar keine Oscillations-Bewegung mit. Daraus erklärt sich, warum zu Folge der Erfahrung die Materie, woraus das Rohr besteht, ziemlich gleichgültig, und daſs die ganz einfache schlichte Kegelgestalt die beste ist. So lange die Oscillationen innerhalb des Rohres bleiben, können sich die Oscillationsweiten nur wenig verkürzen. Tritt aber der Schall aus dem Rohre hervor, so werden sich zuerst nur die äuſsersten Stralen seitwärts ausbreiten; in

der Mitte behalten sie aber, bis in ziemlich grofsen Entfernungen, die Richtung bei, welche sie im Rohr erhalten haben, bis allmälig die Seitenverbreitung der äufsersten Stralen bis zur Achse des Rohres fortschreitet, wo dann der Schall nach den Gesetzen der freien Verbreitung fortgeht, doch mit einer Stärke, als käme er aus einem näher liegenden Punkte als aus der Mundöffnung des Rohres.

§. 35. Auch alle Künsteleyen an der Gestalt des Hörrohres sind ohne alle Wirkung geblieben, oder haben wohl gar die Wirkung beeinträchtigt. Meines Erachtens würde auch bei diesem die ganz schlichte Kegelgestalt die beste seyn. Denn die Wirkung beruhet unstreitig darauf, dafs man die Schallstralen zwingt zu convergiren, wodurch eine Vergröfserung der Oscillationsweiten, also eine Verstärkung des Schalles, entstehen mufs. Ich kann es auch nicht für vortheilhaft halten, wenn man das Hörrohr krümmt, und den Schall nöthigt, von den innern Flächen reflectirt zu werden. Es giebt Hörröhre, wo man dem Schall allerlei Flächen, an denen er sich brechen mufs, recht künstlich entgegenstellt. Die Folge ist, dafs jedes kleine in der Luft vorhandene Geräusch verstärkt zum Ohr gelangt, so dafs man stets ein ähnliches Brausen als an gewissen Muscheln hört, wodurch natürlich die Haupttöne, die gehöret werden sollen, an Deutlichkeit verlieren.

Von der Mittheilung der Oscillationen zwischen ungleichartigen Mitteln.

§. 36. Bis jetzt haben wir den Schall blofs betrachtet, wie er sich in der Luft oder auch in einem anderen völlig gleichartigen Mittel fortpflanzt, oder auch in demselben Mittel durch Zurückstralung verbreitet. Und wenn von der Mittheilung der Oscillationen einer Saite, einer Stimmgabel oder eines andern schallenden Körpers an die Luft, oder von der Luft an die Oberfläche eines andern Körpers die Rede war, so genügte es zu zeigen, dafs die mitgetheilten Oscillationen den mittheilenden gleichzeitig seyn müssen. Es ist aber jetzt genauer zu untersuchen, ob und was für Veränderungen dabei in der Gröfse der Oscillationsweiten, in der Stärke des Schalles, und vielleicht auch in

der Art, wie sich die Stralen im Innern des Körpers verbreiten, vorgehen möchten.

Soll diese Frage mathematisch behandelt werden, so führt sie zu schwierigen Problemen. Aber nach dem Plane, den ich mir in dieser Abhandlung vorgezeichnet habe, ist die Frage mehr physikalisch als mathematisch zu behandeln. Doch wird es dienlich seyn, zuerst zu untersuchen, was aus den anerkannten Gesetzen des elastischen Stofses, zur Beantwortung der Frage folge.

§. 37. Dafs alle Mittheilung der Oscillationen durch den Stofs geschehe, liegt unmittelbar in dem Begriff, und aus der ungemeinen Kleinheit aller Oscillationsweiten darf man mit Sicherheit schliefsen, dafs die durch einen Oscillationsschlag entstehende Verschiebung der Theile nie die Gränzen der vollkommenen Elasticität überschreite. Wir haben ferner im 29sten §. gezeigt, dafs man zwei körperliche Punkte, die sich berühren, als unendlich kleine Körper von gleichem Volumen betrachten könne, deren Massen sich daher wie die Dichtigkeiten der Materien verhalten, denen sie angehören. Nach diesen Betrachtungen kann man alles als gegeben betrachten, was zur Anwendung der Gesetze des Stofses auf die Oscillationen bekannt seyn mufs. Der Grund aber, warum dennoch diese Gesetze keine vollständige Beantwortung der Frage geben können, ist folgender. In der Theorie des Stofses betrachtet man zwei Körper A und B als völlig frei, d. h. man siehet ab von jeder andern mitwirkenden Kraft, obgleich in der Wirklichkeit die Mitwirkung anderweitiger Kräfte gar nicht zu vermeiden ist. Dafs aber dennoch die Versuche, welche man mit elastischen Kugeln anstellt, den Erfolg ziemlich genau der Theorie gemäfs zeigen, rührt daher, weil der Widerstand der Luft und andere Hindernisse der Bewegung, in Rücksicht des Gewichtes der Kugeln, immer nur klein sind. Ganz anders ist aber der Fall, wenn ein oscillirender Punkt A gegen einen anderartigen Punkt B stöfst, denn dieser hat hinter sich und rund um sich herum eine unendliche Menge gleichartiger Punkte C, D, E, F etc., denen er nun seinerseits die durch den Schlag des Punktes A empfangene Bewegung mitzutheilen genöthigt ist. Aber weder der Punkt B selbst, noch die um ihn liegenden, können wegen der Spannung, in der sie sich

gegenseitig befinden, die Bewegung wirklich machen, welche sie nach den Gesetzen des freien Stofses machen würden. Aber dennoch ist klar, dafs in dem Augenblicke des Stofses in beiden das Bestreben nach der dadurch bestimmten Geschwindigkeit entstehe, und dafs diesem Bestreben auf irgend eine Art Genüge geschehen müsse. Da sich aber B von A nicht trennen, also keine andere Bewegung als A machen kann, so ist ferner klar, dafs dieses Bestreben auf die anliegenden Punkte B, C, D etc. übergehen, und allmälig durch unendlich kleine Incremente, oder Decremente, eine Abänderung der Oscillationsweiten bewirken müsse, welches eigentlich der durch höhere Rechnung auszumittelnde schwierige Punkt ist. Man sieht indessen leicht ein, dafs man aus den Elementarsätzen vom Anstofs doch in jedem Fall richtig beurtheilen könne, ob eine Vergröfserung oder Verkleinerung erfolgen müsse, und ob diese beträchtlich oder unbedeutend seyn werde. Nur das eigentliche genauere Maafs der Veränderungen mufs höheren Rechnungen vorbehalten bleiben.

§. 38. Die Fälle, auf deren Beurtheilung es hier besonders ankommt, gehören zu den einfachsten, wo sich die Art des Erfolges selbst ohne Rechnung beurtheilen läfst. Die zu beantwortende Frage ist nämlich bestimmt folgende. Zwei körperliche Punkte A und B, von gleicher Gestalt und Gröfse, aber verschiedener Dichtigkeit oder Masse, berühren sich; B ruht, und A macht einen Oscillationsschlag gegen B; es fragt sich, was würde B dadurch für eine Geschwindigkeit erhalten, wenn es sich frei bewegen könnte. Ist die Dichtigkeit oder Masse A bei weitem kleiner als B, so ist in seinem Schlage wenig Kraft, und in B wird daher nur ein geringes Bestreben nach Geschwindigkeit entstehen. Ist hingegen die Masse A bei weitem gröfser als B, so ist der Schlag kräftig, und wird den Punkt B in eine gröfsere Geschwindigkeit, als A selbst hatte, zu versetzen suchen. Bestimmter läfst sich aber der Erfolg aus der Theorie des Stofses bestimmen.

Die Masse A schlage mit der Geschwindigkeit c gegen die Masse B, und diese erhalte dadurch die Geschwindigkeit v (angenommen, dafs sie sich frei bewegen könnte), so ist unter Voraussetzung vollkommener Elasticität

$v = \frac{2A}{A+B} c$, woraus folgt: $A + B : 2A = c : v$; hieraus lassen sich alle hier zu beachtende Fälle beurtheilen. Nämlich:

1) Ist $B = A$, so ist $v = c$.
2) Setzt man $B < A$, so nähert sich das Verhältnifs $A + B : 2A$ dem Verhältnifs $1 : 2$ desto stärker, je kleiner B ist. Also ist $v > c$ und liegt zwischen den Gränzen c und $2c$.
3) Ist $B > A$, so ist das Maafs des Verhältnisses $A + B : 2A$, nämlich $\frac{2A}{A+B}$, ein desto kleinerer Bruch, je kleiner A gegen B ist. In diesem Fall ist also $v < c$, und dieses unbegränzt um so mehr, je kleiner A ist. Der Werth von v ist allezeit innerhalb der Gränzen 0 und c.

Dafs die Zahlenwerthe, welche diese Formeln geben, in der Anwendung auf Oscillationen nicht richtig sind, dafs sie aber dennoch richtig anzeigen, ob eine Vergröfserung oder Verkleinerung der Oscillationsweiten statt finde, ist leicht einzusehen.

§. 39. Bei der Entwickelung der Theorie des Stofses denkt man gewöhnlich nur an gleichartige Körper. Man kann daher zweifeln, ob man berechtigt sei, die Formeln auch auf den Anstofs ungleichartiger Körper anzuwenden. Es scheint indessen die qualitative Beschaffenheit auf den Erfolg nur in so fern Einflufs zu haben, als davon die Dichtigkeit und die Gränzen der vollkommenen Elasticität abhängen; doch verdienten die Gesetze des Anstofses ungleichartiger Körper wol eine eigene Experimental-Untersuchung.

Wir haben oben (§. 29.) gezeigt, dafs man zwei sich berührende Punkte als unendlich kleine Körper betrachten könne, deren Massen sich wie ihre Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte verhalten. Wir dürfen also nur für A und B in den Formeln die Dichtigkeiten beider Materien setzen, um mit Sicherheit beurtheilen zu können, ob unter bestimmten Umständen eine allmälige Vergröfserung oder Verkleinerung der Oscillationsweiten zu erwarten sey.

§. 40. Betrachten wir nun zuerst die Mittheilung der Oscillationen in der Luft oder einem andern völlig gleichartigen Mittel, so sind die Massen A und B gleich, also $v = c$ (Nr. 1 des vorigen §.), d. h. in B entsteht kein Bestreben nach einer andern Geschwindigkeit,

als A hat. Wenn daher, wie in einer cylindrischen Röhre, die Schallstralen parallel sind, so müssen die Oscillationsweiten gleich, also die Stärke des Schalles unverändert bleiben. Divergiren hingegen die Stralen, so kann man die Massen A und B (nach §. 29.) nicht mehr als absolut gleich betrachten, sondern die Oscillationen müssen immer ausgebreiteteren Massen mitgetheilt werden; hierin liegt der Grund, warum die Oscillationsweiten mit der Entfernung, wie oben (§. 31.) gezeigt worden, abnehmen. Convergiren die Stralen, wie in dem Hörrohr, so müssen sich die Oscillationsweiten (nach Nr. 2. des vorigen §.) vergröſsern.

§. 41. Wenn Oscillationen an eine anderartige Materie mitgetheilt werden, so sind beide fast in jedem Fall an Dichtigkeit sehr verschieden; also ist der Erfolg immer nach Nr. 2. und 3. des 38sten §. zu beurtheilen.

Ist z. B. A Messing oder Stahl, B Luft, so verhält sich die Dichtigkeit beider ungefähr wie 6000 : 1. Setzt man also $A = 6000$, $B = 1$, so ist $A + B : 2A = 6001 : 12000$, d. i. fast genau wie 1 : 2; also werden sich die Oscillationsweiten in der Luft von der Saite aus bis zu einer vermuthlich sehr kleinen Weite zuerst vergröſsern, und dann erst nach dem Gesetz §. 31. abnehmen.

Wäre umgekehrt A Luft und B Stahl oder Messing, so ist $A = 1$ und $B = 6000$; also $A + B : 2A = 6001 : 2$, oder ziemlich genau 3000 : 1; es werden also die Oscillationsweiten ungemein klein ausfallen, u. dergl. m.

Wir wollen nun versuchen, diese Ergebnisse auf einige akustische Erscheinungen anzuwenden.

Von der Resonanz.

§. 42. Was in den akustischen Schriften zur Erklärung der Resonanz gesagt wird, ist nicht nur unbefriedigend, sondern ich erinnere mich auch nicht einmal, irgendwo eine recht bestimmte Erklärung des Begriffes gefunden zu haben, indem häufig Erscheinungen, die in ihren äuſsern Bedingungen und in ihrer Beschaffenheit das Gegentheil der Resonanz sind, dennoch einer Resonanz zugeschrieben werden.

Den unzweideutigsten Fall einer Resonanz bietet unstreitig der Resonanzboden eines Saiten-Instrumentes dar. An einem Claviere wird eine Metallsaite an dem einen Ende gegen einen hölzernen Steg gedrückt, der auf einem dünnen und sehr elastischen Brett, das man den Resonanzboden nennt, befestigt ist. Bei Violinen findet dasselbe statt, nur ist der ursprünglich oscillirende Körper eine Darmsaite. Unter diesen Umständen werden die Oscillationen der Saite dem Steg und Resonanzboden mitgetheilt, die wir hier als einen Körper betrachten können; von dem Resonanzboden aber werden sie wieder der Luft mitgetheilt. Die äufsern Bedingungen der Resonanz sind also: dafs die Oscillationen der Saite an Holz, und von diesem an die Luft mitgetheilt werden. Und die Wirkung dieser Construction besteht darin, dafs der Ton weit stärker klingt, als wenn die Oscillationen der Saite blofs unmittelbar der Luft mitgetheilt werden, wie dieses der Fall ist, wenn man eine Saite über einen wenig elastischen Körper, z. B. über einen Stein oder feuchtes Holz spannt.

Die Verstärkung des Schalles rührt von zwei Ursachen her.

1) Aus Vergröfserung der Oscillationsweiten. Auf einem Clavier gehen zuerst die Oscillationen aus Messing in Holz über. Da nun Messing ungefähr 15 mal so schwer als Tannenholz ist, so kann man $A = 15$, $B = 1$ setzen. Dann ist

$$A + B : 2A = 16 : 30,$$

folglich werden die Oscillationsweiten im Holze sich fast verdoppeln. Dann gehen sie aus Holz in die Luft über, die ungefähr 400 mal leichter als Tannenholz ist. Setzt man also $A = 400$, $B = 1$, so ist

$$A + B : 2A = 401 : 800;$$

also werden die im Holze schon verdoppelten Oscillationsweiten ungefähr gegen die Oscillationsweiten der Saite fast viermal vergröfsert seyn.

Theilte dagegen die Saite ihre Oscillation der Luft unmittelbar mit, so ist Messing ungefähr 4000 mal dichter als Luft. Setzt man also $A = 4000$, $B = 1$, so hat man

$$A + B : 2A = 4001 : 8000.$$

Die Oscillationsweiten, welche bei dem Durchgang durch Holz vervierfacht worden, werden in diesem Fall nur verdoppelt. Und wenn man

sich auch hier auf die Zahlen 4 und 2 nicht verlassen kann, so ist doch gewifs, dafs die Oscillationsweiten durch die Resonanz vergröfsert werden.

2) Die zweite und wichtigste Ursache der Verstärkung ist, dafs das Ohr nunmehr eine viel gröfsere Menge von Schallstralen erhält, nämlich nicht nur von jedem einzelnen Punkte der Saite, sondern auch von allen mitoscillirenden Punkten des Resonanzbodens. Hierbei entsteht die Frage, wie weit sich wohl die Oscillationen dem Holze mittheilen, ob nur in der Nähe der oscillirenden Saite, oder in dem ganzen Umfang des Resonanzbodens. Begreiflich können die Oscillationen nicht in allen Punkten von gleicher Stärke seyn; am lebhaftesten sind sie da, wo die oscillirende Saite den Steg drückt; von da aus müssen sie abnehmen, und wahrscheinlich im umgekehrten Verhältnifs mit den Quadraten der Entfernung; doch dürfte wohl die Lage der Fibern des Holzes eine andere minder regelmäfsige Abnahme der Oscillationen veranlassen. Auf jeden Fall geschieht die Abnahme allmälig und stätig, so dafs sich gar keine bestimmte Gränze der Oscillationen angeben läfst, und sie sich daher unstreitig über den ganzen Resonanzboden, so weit er frei ist, verbreiten. Diese Vorstellung hat keine Schwierigkeit, so lange man an einen einzigen Ton denkt. Klingen aber mehrere Töne zusammen, so ist zwar die Einbildungskraft nicht mehr im Stande, anschaulich zu machen, wie in demselben Punkt zu gleicher Zeit mehrere Oscillationen bestehen können, ohne sich zu verwirren. Es ist aber schon oben (§. 19.) gezeigt worden, dafs allerdings in einem Punkte der Luft vielerlei Oscillationen zugleich bestehen können, ohne sich in der Wirklichkeit und für das Gefühl zu verwirren. Was aber dort in Ansehung der Luft gesagt worden, ist für jeden anderartigen körperlichen Punkt gültig.

§. 43. Die Richtigkeit dieser Theorie der Resonanz bestätigt sich auf eine sehr befriedigende Art durch die Erscheinungen der Stimmgabeln. Chladni hat in seiner Akustik sehr deutlich die Art ihrer Oscillationen nachgewiesen. Wenn die Arme derselben durch einen Schlag oder auf andere Art in Oscillation gesetzt werden, so theilt sich die Gabel in drei Stücke vermittelst zweier Schwingungsknoten, die am

untern Ende der Arme, ganz nahe bei der Verbindung beider liegen. Die beiden Arme schwingen zugleich einwärts und zugleich auswärts. Das mittlere Stück aber schlägt aufwärts und abwärts, jenes, wenn die Arme auswärts, dieses, wenn sie einwärts schwingen. Die Oscillationen dieses Mittelstückes sind also in Beziehung auf den Griff als Longitudinalschwingungen zu betrachten.

Ist nun die Gabel in Oscillation gesetzt, und man hält den Griff frei zwischen den Fingern, so fühlt man zwar deutlich ihre zitternde Bewegung, aber der Ton den man hört ist nur schwach. Setzt man aber den Griff auf einen Resonanzboden, oder auch nur auf ein recht trockenes Brett, so wird der Ton unerwartet laut. Dafs hierbei die Oberfläche des Holzes rings umher oscillire, kann man mit der Hand fühlen, und wenn der Ton kräftig ist, selbst noch in einer nicht unbeträchtlichen Entfernung von der Gabel. Setzt man zwei Gabeln, welche verschiedene Töne geben, zugleich auf das Holz, so fühlt man ein verstärktes Zittern, aber das Ohr unterscheidet beide Töne deutlich, so dafs offenbar die in demselben Punkt des Holzes vereinigten Oscillationen sich dennoch für das Ohr nicht verwirren.

Man sieht leicht, dafs die Erklärung dieser Erscheinungen gar nicht verschieden ist von der, die im vorigen §. in Ansehung des Claviers gegeben worden. Auch hier verhält sich die Dichtigkeit des Stahles zu der des Holzes ungefähr wie 15 : 1, und die des Holzes zu derjenigen der Luft wie 4000 : 1. Es müssen daher die Oscillationen, welche die Luft mittelbar durch das Holz erhält, gröfser seyn, als die, welche sie unmittelbar vom Stahle erhält. Ueberdiefs erhält das Ohr hier wie dort von allen oscillirenden Punkten des Holzes, so wie von allen Punkten der Gabel, Schallstralen, statt dafs sie nur die letztern allein erhält, wenn man die Gabel frei hält, deren verhältnifsmäfsige Menge aber, wegen des geringen Umfanges der Gabel, viel kleiner ist.

Durch einen kleinen Versuch kann man die Richtigkeit dieser Erklärung sehr anschaulich machen. Wenn man die oscillirende Gabel nicht wirklich auf das Holz aufsetzt, sondern demselben gleichsam nur unendlich nahe bringt, so treffen nur die abwärts gerichteten Schläge des Griffes das Holz. Dieses empfängt daher immer nur einen Schlag,

während der Griff zweie macht. Die Folge ist, daſs man auſser dem Ton der Gabel auch noch ihre tiefen Octaven hört.

Von dem Mitklingen gleichgestimmter Saiten und von der Aeolsharfe.

§. 44. Wenn man zwei Saiten genau in den Einklang stimmt und die eine allein anschlägt, so oscillirt die andere freiwillig mit, doch nur schwach. Man schreibt diese Erscheinung einer Resonanz zu. Es ist aber aus dem Inhalt der vorigen §§. klar, daſs sie mit der Resonanz gar nichts gemein hat, weder in Ansehung der äuſsern Bedingungen, noch in Ansehung der Wirkungen. Die Oscillation geht hier von Metall in die Luft, und von dieser wieder zu dem Metall der zweiten Saite über, und der so erregte Ton ist sehr schwach.

Wenn die Oscillationen der Luft die zweite Saite treffen, so wirken ihre Schläge nicht anders auf sie, als jede andere schwache mechanische Kraft wirken würde. Sie setzen sie in diejenigen Oscillationen, welche die Saite vermöge ihrer Spannung leichter als jede andere annimmt. Diese Oscillationen sind also als ursprünglich erregte, nicht als mitgetheilte zu betrachten. Und was die Stärke des Tones betrifft, so sind zwar die Oscillationsweiten der Luft gröſser, als die der ersten Saite; gehen aber diese Oscillationen aus der Luft in die zweite Saite über, so hat man, wenn $A = 1$ gesetzt wird, ungefähr $B = 4000$; also $A + B : 2A = 4001 : 2$, d. h. die Oscillationsweiten der Saite können gegen 2000 mal kleiner seyn, als in der Luft. Bei dem neuen Uebergang von der zweiten Saite in die Luft vergröſsern sie sich zwar wieder, können aber dennoch gegen 1000 mal kleiner bleiben, als die von der ersten Saite kommenden. Zwar sieht man leicht ein, daſs die hier gegebenen Zahlenwerthe nicht sicher sind, aber das Sachverhältniſs kann kein anderes seyn.

Eben so wenig hat das artige Spiel der Aeolsharfe den geringsten Zusammenhang mit der Resonanz. Der an den Saiten hinstreichende Luftzug, wirkt auf einzelne Theile derselben, wie jede andere mechanische Kraft, und setzt irgend einen aliquoten Theil derselben in Oscil-

lationen. Das harmonische in diesem Spiel rührt aber daher, dafs die entstehenden Töne keine andern als die 6 oder 7 tiefen Töne der harmonischen oder natürlichen Tonleiter sind, also Octave, Quinte, Quarte, Tertie, Sexte, auch wohl Septime des Grundtons, auf welchen alle Saiten des Instruments gestimmt sind.

Ueber die Verbreitung der Oscillation in andern Mitteln als Luft.

§. 45. Wenn Oscillationen auf irgend eine Art in einem Mittel erregt werden, welches man, so wie Luft, in allen Richtungen als völlig gleichartig betrachten kann, so kann sich der Schall in demselben offenbar nicht anders fortpflanzen und verbreiten, als in der Luft. Dieser Fall findet aber im strengsten Sinne wohl nur bei Flüssigkeiten statt, sie mögen tropfbar oder ausdehnsam seyn. Betrachtet man also den Schall als von einem einzigen Punkte eines solchen Mittels ausgehend, so müssen regelmäfsige Schallwellen entstehen, deren Breite nur anders seyn wird als in der Luft, weil die Geschwindigkeit mit welcher sich der Schall fortpflanzt, in jedem Mittel anders ist. Sofern aber der Schall von vielen Punkten ausgeht, wie, wenn die Oberfläche einer Flüssigkeit durch die Luft in oscillirende Bewegung gesetzt wird, so werden sich zwar die Stralen auf unendlich mannigfaltige Art durchkreuzen, aber dennoch werden sie eben so wenig als in der Luft einander stöhren, und man wird nie zu einem Irrthum verleitet werden, wenn man jeden Schallstral, oder jeden Schallkegel gerade so betrachtet, als ob er ganz allein da wäre, d. h. in dem betrachteten Stral, oder in dem betrachteten Kegel wird alles wirklich seyn, was da seyn würde, wenn er allein vorhanden wäre. Alle von andern Richtungen herkommenden Bewegungen sind zwar in jedem Punkte auch vorhanden, heben aber die besonders betrachteten nicht auf, und können daher bei der Betrachtung aufser Acht gelassen werden.

§. 46. Die Fortpflanzung und Verbreitung der Oscillationen durch das Innere fester Körper ist eigentlich der schwierigste Theil der Akustik, und man kann kaum erwarten, dafs es dem menschlichen Fleifse

je gelingen dürfte, die Gesetze der Oscillationen für diesen Fall, es sey auf dem Wege der Beobachtung oder der Rechnung, völlig ins Klare zu bringen. Die neuern Entdeckungen über das Gefüge der Krystalle haben es sichtbar gemacht, dafs selbst bei solchen Körpern, die unseren Sinnen sich als völlig stätige und gleichartige Massen darstellen (wie Glas, Metalle etc.), dennoch im Innern nicht in allen Richtungen gleiche Spannung vorhanden sey, welches unstreitig einen grofsen Einflufs auf die Art haben mufs, wie sich die Oscillationen im Innern verbreiten. Diese Dunkelheit in der Theorie dürfte indessen doch keine sehr nachtheiligen Folgen für die Anwendungen der Akustik haben. Denn wenn wir etwa unsere Fensterscheiben ausnehmen, so kommt der Fall selten oder nie vor, dafs der Schall durch eine ganz gleichartig scheinende Masse fortgepflanzt wird. Unsere massiven Wände bestehen eigentlich aus einem höchst unregelmäfsigen Conglomerat kleiner Körner von verschiedener Gröfse und Gestalt; und eben diese Unregelmäfsigkeit nähert sich wieder einer nicht blofs scheinbaren, sondern wirklichen Gleichartigkeit in allen Richtungen. Denn wenn man in Gedanken Linien in den mannigfaltigsten Richtungen zieht, so wird man schwerlich behaupten können, dafs in der einen mehr Spannung sey, als in der andern. Doch nimmt unstreitig die Spannung von oben nach unten zu wegen des immer gröfser werdenden Druckes der überstehenden Massen; aber eben so verhält es sich mit der Luft, mit dem Wasser, und überhaupt mit allen Körpern. Man darf daher wohl annehmen, dafs die Gesetze, nach welchen sich der Schall durch unsere Wände, oder andere grofse feste Massen fortpflanzt, nicht wesentlich von denen verschieden seyn könne, nach welchen er sich durch ganz gleichartige Mittel verbreitet. Der Hauptunterschied möchte nur darin liegen, dafs die Kraft der Oscillationen nach einem höheren Verhältnifs mit der Entfernung von der Stelle, von wo die Oscillationen ausgehen, abnimmt, als in der Luft, weil der Durchgang durch eine Menge ungleichartiger Körner, und die zwischen ihnen vorhandenen Pori, wohl nicht anders, als schwächend wirken kann. Der Durchgang durch Holz möchte vielleicht eine besondere Aufmerksamkeit der Beobachter verdienen, weil hier in verschiedenen Richtungen die Spannung offenbar sehr verschieden ist.

§. 47. Dafs übrigens, auch abgesehen von dieser Dunkelheit, der Schall bei dem Durchgang durch jeden festen Körper sehr geschwächt werden müsse, ergiebt sich deutlich, aus der vorgetragenen Theorie. Wenn in einem Zimmer die Oscillationen der Luft in eine Wand, also aus einer sehr dünnen in eine viel dichtere Materie übergehen, so müssen sich die Oscillationsweiten schon auf der Oberfläche sehr verkleinern. Pflanzen sie sich dann im Innern der Wand fort, so werden sie sich noch stärker, als bei dem Fortgang in der Luft verkleinern. Theilen sie sich endlich auf der anderen Seite wieder der Luft mit, so werden zwar die Oscillationsweiten wieder etwas gröfser, aber doch lange nicht so stark, als wenn sie durch blofse Luft bis dahin gelangt wären. Dafs übrigens der Schall destoweniger geschwächt werde, je dünner der Körper ist, durch welchen er dringt, bedarf keiner Erwähnung. Uebrigens folgt noch aus unserer Theorie, dafs jeder Körper ohne alle Ausnahme dem Schalle durchdringlich ist.

§. 48. Wir haben oben (§. 21. f.) gezeigt, dafs die Schallstralen von der Oberfläche eines Körpers, nicht wie das Licht von einem Spiegel sondern wie von einer unpolirten Oberfläche, zurückgeworfen werden. Erfahrung und Gründe verstatten keine andere Vorstellung. Denn die Erscheinungen des Wiederhalles und des Echo lassen sich auf keine andere Art erklären, und die Unebenheiten einer Wand verstatten den so feinen Theilen der Luft in keinem Fall eine so regelmäfsige Reflexion, als den Lichtstralen wenn sie auf eine Spiegelfläche fallen. Eben so kann man, meines Erachtens, durchaus nicht annehmen, dafs bei dem Durchgang des Schalles durch feste Körper eine solche Refraction statt finde, als das Licht befolgt, wenn es durch die polirte Oberfläche eines durchsichtigen Körpers hindurchgehet. So wie wir indessen oben als wahrscheinlich gezeigt haben, dafs ein Schallstral von einer mäfsig ebenen Fläche nach der entgegengesetzten Seite stärker als in andern Richtungen reflectirt werde, eben so möchte ich es nicht für unmöglich halten, dafs eine Annäherung an die Refractions-Gesetze, auch bei dem Durchgang des Schalles durch feste Körper statt finde; und eine ganz regelmäfsige Refraction dürfte man schwerlich in irgend einem Fall, es müfste denn etwa im Wasser seyn, erwarten.

Schlufs.

§. 49. Es scheint mir, dafs die Ansicht von den Grundlehren der Akustik, die ich in dieser Abhandlung entwickelt habe, zu richtigeren, bestimmteren und deutlicheren Erklärungen der meisten Erscheinungen führe, und dafs sie da, wo sich unausweichliche Schwierigkeiten finden, wenigstens sehr bestimmt die Punkte andeute, auf deren fernere Erledigung es eigentlich ankommen dürfte. Glücklichere Analytiker, denen nicht zerrissene Stunden, sondern zusammenhängende und ungestörte Mufse zu Gebote steht, mögen nun versuchen, ob die aus den akustischen Erscheinungen selbst abgeleiteten Gesetze, durch Rechnung gerechtfertigt oder widerlegt werden können; und ob es überhaupt möglich sey, die noch vorhandenen Lücken auf dem Wege der Theorie auszufüllen.

Ueber

den Wasserkopf vor der Geburt,

nebst

allgemeinen Bemerkungen über Misgeburten.

Von

Hrn. K. A. RUDOLPHI.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. April 1824.]

Der innere Wasserkopf ist eine der häufigsten Krankheiten, welche den Embryo trifft, und die nach der verschiedenen Periode, in der sie beginnt, sich in ganz andern Gestalten zeigt.

Das eine Mal beginnt der innere Wasserkopf mit der Kopfbildung des Embryo's, wenigstens früher als sich am Oberschedel Verknöcherungspunkte finden. Wir besitzen einen solchen Embryo auf dem Anatomischen Museum, von dem ich hier eine Abbildung vorzulegen die Ehre habe, und der seiner Gröfse nach etwa zwei Monate alt zu seyn scheint ([1]). Bei diesem ist die Wasserblase über die ganze Basis des Schedels gleichförmig erhaben und so durchsichtig, dafs man bestimmt sagen kann, dafs in den obern Schedeldecken keine Verknöcherungspunkte enthalten sind. Einen ähnlichen Embryo besitzt das Anatomische Museum in Breslau, wie mir Otto, der Director desselben, gesagt hat. Ich selbst habe keinen solchen Fall weiter gesehn, weifs auch von keiner Abbildung davon. Es ist auch leicht begreiflich, dafs nur ein seltener Zufall ein Ey darbieten kann, in dem die zarte Blase

([1]) Walter (*Museum anat. p.* 115. *n.* 790.) nennt das Ey sechs Wochen alt, allein er hat alle kleinen Foetus seiner Sammlung zu jung angegeben; namentlich gilt diefs von seinen Skeletten der Embryonen, wovon manche um Vieles zu jung aufgeführt sind.

ganz erhalten ist. Dagegen kommen oft ältere Embryonen vor, in denen die Kopfblase zerrissen ist, und zwar in doppelter Art. Entweder es sind Embryonen von drei bis vier oder fünf Monaten, wo die Lappen der geplatzten Blase noch deutlich am Kopfe hängen, dergleichen ich hier einen Fall in einer Abbildung (Fig. 2.) vorzeige, wovon wir aber noch mehrere besitzen: oder wir finden nur theilweise etwas von den Lappen der Blase, und der Schedelgrund liegt offen vor; diefs ist bei älteren Foetus der Fall, die häufig genug zu vollen Tagen ausgetragen werden, selbst zuweilen lebend auf die Welt kommen, und eine kurze Zeit ihr kümmerliches Daseyn fortsetzen.

Diese ist unter allen angebohrnen Misbildungen des Kopfes die häufigste, und solche Kinder nannte man ehmals mit Unrecht *Acephali*, oder *Acephali spurii*, in neuerer Zeit *Anencephali*, oder *Hemicephali*, deutsch Katzenköpfe.

Die andere Art des Wasserkopfs entsteht erst nach dem Beginnen der Knochenbildung, so dafs man daher keinen Knochen vermifst. Indem aber das Wasser die Gehirnhölen immer stärker ausdehnt, so dafs sich die Wände derselben immer mehr verdünnen, nimmt die Gröfse des Kopfes bedeutend zu, so dafs Schedelknochen in der gewöhnlichen Gröfse und Menge denselben nicht umfassen könnten. Daher bekommen theils einzelne Knochen einen gröfseren Umfang, theils aber bildet sich in den Zwischenräumen derselben eine oft sehr grofse Menge eigener Knochenstücke.

Von dieser Art ist mir im vorigen Jahre ein sehr seltener Fall vorgekommen. Die Frau eines Kutschers hieselbst gebahr nämlich den 28. Mai ein Kind mit einem Wasserkopfe, das bis zum 20. Juni lebte. Am folgenden Tage erhielt ich es, nachdem ich dasselbe schon während seines Lebens beobachtet hatte.

Der Kopf hatte eine sehr ausgezeichnete Gestalt, wie Fig. 3. zeigt. Die Stirn steigt sehr gerade zu einer beträchtlichen Höhe, und von der Scheitel senkt sich wieder die hintere Schedelwand jäh und sehr tief hinab, so dafs der Schedel hinten und nach unten am stärksten ausgedehnt ist. Nach Wegnahme der Schedeldecken sieht man auch eine eigenthümliche Knochenbildung (Fig. 4. 5. 6.). Die Stirnbeine sind aufserordentlich grofs, und fast senkrecht aufsteigend. Die Scheitel-

beine sind von einer aufserordentlichen Ausdehnung, zugleich aber fast der ganzen Länge nach unter sich verwachsen, Etwas, wovon ich weder in der Natur noch bei irgend einem Schriftsteller etwas ähnliches gefunden habe. Die vordere Fontanelle ist sehr grofs, allein am stärksten sind die Scheitelbeine von den Schlafbeinen, und besonders von dem Hinterhauptsbein entfernt; so dafs hier auch eine Menge, zum Theil nicht unbeträchtlicher Knochenstücke eingesprengt ist.

Der durchsägte Schedel ward unter Wasser geöffnet, so dafs das Gehirn nicht zusammenfiel, und es gelang mir auf diese Art, das ganze Gehirn unverletzt zu erhalten, und so ist es auch noch auf dem Anatomischen Museum, und zwar als das erste Präparat der Art. Ich habe den Vortheil des Präparirens unter Wasser vorzüglich bei den Augen kennen gelernt; auf andere Weise ist es auch gar nicht möglich, das Gehirn zu erhalten, und deswegen ist in keinem andern Museum bis jetzt etwas Aehnliches vorhanden; doch hatte man auch ehemals zu sehr sein Augenmerk auf den Schedel bei solchen Wasserköpfen gerichtet, und Gall hat das Verdienst, gegen den älteren Walter bewiesen zu haben, dafs die grofsen, sämtlich nur innere, niemals äufsere Wasserköpfe sind. Gall hat auch in seinem grofsen Werke (Taf. 25.) das geöffnete Gehirn einer Person abgebildet, welche mit einem sehr grofsen innern Wasserkopfe (vier Pfund Wasser enthaltend) fünfundfunfzig Jahre alt geworden war.

Die schöne Zeichnung (Fig. 7.), welche ich hier von der Basis des Gehirns darlege, und welche ich D'Altons Meisterhand verdanke, entspricht ganz der beschriebenen Schedelbildung. Man findet nämlich, dafs das Wasser sich nach unten und hinten Platz gemacht hat, so dafs daselbst nur die Hirnhäute, kein Gehirn, zu sehen sind, und dieses wie scharf abgeschnitten neben den Häuten durchscheint. Auffallend ist daher auch die ungeheure Entfernung des kleinen Gehirnes vom hintern Rande des grofsen. Von der obern Gehirnfläche habe ich keine Zeichnung besorgt, weil das Gehirn hier ganz natürlich beschaffen erscheint.

Ich habe vier bis fünf grofse innere Wasserköpfe frisch geöffnet, in denen aber stets die Verdünnung des Gehirns oben war, so dafs es hier wie ein Hauch über dem Wasser unter den Gehirnhäuten lag.

Die Gehirnhölen waren also nach oben ausgedehnt, statt dafs sie hier nach unten (besonders im hinteren Horn) erweitert waren. Einmal habe ich, bei einem etwas über dreifsig Jahre alten Manne, der von Jugend auf etwas stumpfsinnig war, einen innern und äufsern Wasserkopf zugleich gefunden, und das merkwürdige Präparat ist ebenfalls auf dem Anatomischen Museum. Zweimal habe ich den äufseren Wasserkopf allein, allein beide Male sehr unbedeutend gefunden.

Aufser den bisher genannten beiden Arten des inneren Wasserkopfs, wo das Wasser eine gröfsere, oder allgemeine Ausdehnung bildet, kommen nun auch partielle innere Wasserköpfe und zwar von zweierlei Art vor.

Bei der einen ist der Schedel übrigens natürlich gebildet; nur an einer Stelle z. B. am Hinterhaupt ragt ein Wassersack hervor, und hier fehlt ein Stück des Knochens, so dafs jener Sack aus der Lücke hervorhängt. Wahrscheinlich hat hier eine geringere Wasseransammlung früh auf eine Stelle hingewirkt, dafs nur hier der Knochen sich nicht hat ausbilden können, während alles Uebrige gehörig entwickelt ist.

Bei der andern Art ist der Kopf nach Art der Katzenköpfe stark niedergedrückt, allein es fehlt die obere Schedeldecke nicht, sondern nur an einer Stelle ist eine Lücke, aus welcher der Sack hervorhängt. Diese Art ist sehr merkwürdig, und je nach dem Ort, wo die Lücke ist, verschieden; doch ist es sehr überflüssig, aus jedem verschiedenen Orte den Grund zu einer eigenen Species hernehmen, und diese mit einem eigenen Namen belegen zu wollen, wie Geoffroy in dem gleich zu nennenden Werke thut.

Der Wasserkopf der ersten Art, aus dem die Halbköpfe entstehen, ist als solcher häufig bestritten; doch glaube ich, dafs es weniger oft geschehen seyn würde, wenn die Schriftsteller solche Präparate, wie Fig. 1. und 2., zur Hand gehabt hätten. Denn hier läfst sich auf das Deutlichste die Zerreifsung der Blase nachweisen, welche Manche geläugnet haben, indem sie glaubten, dafs der Foetus eine solche Zerreifsung nicht überleben würde. Dagegen hat aber Meckel (im ersten Stück des ersten Bandes seines Archivs) schon sehr gute Gründe beigebracht, und der Augenschein beweiset es dort.

Zu denen, welche in dieser Misbildung keinen Wasserkopf als Grundursache ansehen wollen, hat sich neuerdings Geoffroy-St-Hilaire (*Philosophie anatomique des Monstruosités humaines. Paris* 1822. 8.) gesellt, und da er einige eigenthümliche Behauptungen darüber vorbringt, so will ich diese in der Kürze durchgehen, denn sonst ist die Sache durch Haller, Sandifort, Walter, Meckel und Otto schon hinreichend auseinandergesetzt, und die benannten Präparate geben den Ausschlag.

Geoffroy trifft der Vorwurf, daſs er erstlich fast gar keine Notiz von seinen Gegnern genommen, und zweitens zu wenige Fälle beobachtet hat, denn sonst würde er hier unmöglich die gröſste Gleichförmigkeit behaupten, wo sie nicht ist. Erstlich sind die Köpfe der Embryonen, an welchen die Wasserblase zerrissen ist, sehr verschieden; bald ist mehr nach vorne, bald mehr nach hinten, oder in der Mitte die Zerreiſsung geschehen; von den Knochen, z. B. dem Hinterhauptsbein, ist bald mehr, bald weniger vorhanden; bald ist das Gesicht unverändert, bald hingegen hat auch die Zerstörung dahin eingewirkt, wenn nämlich auch das Wasser nach unten hindrängte, wie denn die allermehrsten Verunstaltungen des Kopfs von abnormer Wasseransammlung herrühren. Was aber die Hauptsache ist, und worauf schon Walter und Meckel aufmerksam gemacht haben, bald ist viel, bald wenig vom Gehirn vorhanden; bald ist das Rückenmark da, bald fehlt es.

Der Druck des Wassers hat auch keineswegs immer in dem Maaſse Statt, daſs die Zahl der Halswirbel bis auf drei, vier oder fünf verringert ist, wovon besonders Otto in seinen beiden Dissertationen über Misgeburten mehrere Fälle erzählt. Unter fünf Skeletten von Halbköpfen auf dem Anatomischen Museum fehlt nur bei einem ein Paar der Halswirbel, die übrigen haben die vollständige Zahl. Unter den nicht skelettirten Katzenköpfen des Museums kann man auch leicht an der Kürze oder Länge des Halses auf die verschiedene Beschaffenheit schlieſsen; denn bei einigen ist der Kopf zwischen die Schultern niedergedrückt, bei andern hingegen hat der Hals die gewöhnliche Länge.

Eine Hemmungsbildung mit Meckel und Geoffroy in diesem oder in jedem Wasserkopf zu sehen, scheint mir nicht richtig. So lange der Kopf des Embryo normal beschaffen ist, kann keine widernatürliche

Wasseranhäufung Statt finden; mit der vermehrten Wasserbildung ist die Krankheit zugleich gegeben, rühre sie auch von noch so verschiedenen Ursachen her.

Ich bezweifele jedoch, daſs hier je eine andere Ursache, als ein entzündlicher Zustand vorhanden ist, oder wenigstens eine ihm nahe tretende Congestion des Bluts, bestehe diese in Zurückhaltung oder in Andrängen des Bluts. Eine Menge Abortus, besonders der späteren Zeit, rühren gewiſs davon her, und bei einer unthätigen Lebensart und zu reichlichen Nahrung der Mutter kommt das sehr leicht. Ich habe bei einem nur wenig zu früh gekommenen Kinde, durchaus alle Theile des Körpers, selbst den Uterus nicht ausgenommen, mit Blut überfüllt und wie injicirt gesehen; ich habe öfters den Kopf solcher Kinder, wie bei Erwachsenen beschaffen gesehen, die am blutigen Schlagfluſs gestorben sind; bei einem sechsmonatlichen Foetus waren die *Plexus choroïdei* der Seitenhölen sogar zwei dicke mit Blut erfüllte Säcke. Bei allen inneren Wasserköpfen, sie mochten lebend oder todt auf die Welt gekommen sein, fand ich einen starken Niederschlag auf der Basis der Hirnhölen, grade wie man es bei später entstandenen acuten Wasserköpfen antrifft, deren Entstehung man seit Formey mit Recht einer Entzündung zuschreibt; oder wie man es in der Entzündung der äuſseren Fläche des Herzens, oder der inneren der Bauchwände (die man fälschlich *Pericarditis* und *Peritonitis* nennt) überall findet.

Gall's Hypothese, daſs bei dem inneren Wasserkopf sich das Gehirn entfaltet, verdient wohl keine neue Widerlegung, obgleich sie Geoffroy auf das Neue, jedoch ohne neue Gründe, vertheidigt.

Geoffroy's Erklärungsweise der Katzenköpfe ist wohl die allerunwahrscheinlichste. Er glaubt nämlich, daſs widernatürliche Verbindungen des Mutterkuchens mit dem Kopf des Kindes daran Schuld sind. Allein wenn bei dem von ihm beobachteten Falle eine solche widernatürliche Verbindung Statt fand, so war dieſs eher eine Folge als eine Ursache jenes Zustandes. Auf dem Anatomischen Museum ist ein Präparat, das ich, wie so vieles Andere Heim's Güte verdanke, wo die Placenta ihren gewöhnlichen, nur sehr langen, Nabelstrang hat, überdieſs aber sie auch mit dem Kopfe des ungefähr fünfmonatlichen Foetus an einer Stelle verwachsen ist; hier ist aber kein Katzenkopf. Dagegen

haben alle unsere Fälle von diesen keine solche Verbindung gezeigt, und der kleine Embryo mit Wasserkopf (Fig. 1.) liegt mit völlig freiem Kopfe.

Nichts ist häufiger als der Wasserkopf, nichts seltener als jene Verbindungen; man wird auch bei den Schriftstellern wenige Fälle davon finden; und aufser jenem oben erwähnten ist nur ein von Walter (Anat. Mus. p. 129. n. 3016.) beschriebenes Präparat vorhanden, wo die Nabelschnur mit dem einen Arme verwachsen ist, obgleich der Fall auch nur kaum hieher gehört. Darauf ist also gewifs nicht zu rechnen.

Zum Schlufse seyen mir noch ein Paar Bemerkungen erlaubt.

Erstens sind gewifs sehr viele Misgeburten der Schriftsteller nur als kranke oder durch Krankheit veränderte Embryonen zu betrachten. Dahin gehören alle Wasserköpfe, und zwar eben so gut, wie man Kinder mit Wasser im Herzbeutel, im Bauche oder in den Nieren als kranke Kinder betrachtet; bei den letzteren habe ich auch gradezu einen Niederschlag der Lymphe bemerkt, wie bei den obenerwähnten Entzündungen.

Eben so sind die Kinder, deren Extremitäten gegen den Kopf so sehr zurückgeblieben sind, und deren ich mehrere untersucht habe, nur als solche zu betrachten, bei denen die Knochenbildung fehlerhaft ist, ungefähr wie bei der englischen Krankheit, wohin sie auch schon J. H. Klein in einer (1763. 4.) zu Strafsburg erschienenen *Diss. de Rhachitide congenita* brachte. Vergl. Maur. Romberg *Diss. de Rhachitide congenita.* Berlin 1817. 4.

Nicht wenige Misbildungen rühren ferner von dem kranken Nervensystem her. Dahin rechne ich namentlich alle Verdrehungen der Gliedmafsen, Klumphände und Klumpfüfse. In der gröfsten Mehrzahl finde ich sie nur bei fehlerhaft gebildetem Kopfe, wo das Gehirn beträchtlich gelitten hat; sie finden sich auch daher schon bei sehr jungen Embryonen, wovon mehrere Beispiele auf unserm Museum vorkommen. An mechanische Ursachen ist bei diesen am allerwenigsten, doch auch sonst nirgends bei dieser Misbildung zu denken. Nicht zu vergessen aber ist es, dafs ein Nervenleiden Statt finden kann, ohne dafs sichtbare Krank-

heitszustände des Gehirns gefunden werden. Wie oft leiden Schwangere von den heftigen (gewifs krampfhaften) Bewegungen ihrer Früchte, und zu rechter Zeit bringen sie wohlgestaltete Kinder zur Welt; so können auch übrigens gutgebildete Kinder nur in den verzogenen Füfsen oder Händen einen Beweis ihres ehemaligen krankhaften Zustandes darbieten.

Die Fettanhäufungen, die Geschwülste aller Art sind einer krankhaften Reproduction zuzuschreiben, und auch sie gehören zu den Krankheitsfällen, nicht zu den Misgeburten. Das Fehlen einzelner Theile z. B. einer Extremität, oder aller, gehört auch wohl dahin.

Nur das sind wohl eigentlich Misgeburten, deren Entstehung in einer gewissen Breite des Bildungsacts seinen Grund hat, und wo dadurch etwas sehr Abweichendes entsteht, das als Monstrnm auffällt.

Wenn zwei oder mehrere Keime sich jeder für sich entwickeln, so finden wir natürlich in jedem Kinde die Regel wieder; wenn zwei oder drei sich so im Bildungsact durchdringen, dafs sie einen gröfseren oder geringeren Zusammenhang haben, so nennen wir es ein Monstrum, und wenn auch alles übrigens gerundet und in der Wohlgestalt gesunder Kinder erscheint.

Wenn das Herz etwas mehr nach rechts liegt, als gewöhnlich, so nennen wir es noch nicht monströs, selbst kaum, wenn das Herz allein sich stark nach rechts gewendet hätte; wären aber dabei die Gefäfse aus den entgegengesetzten Hölen desselben entsprungen, läge die Leber links, der Magen und die Milz rechts, so ist es eine monströse Lage, obgleich dabei alle Theile normal gebildet seyn, und Menschen, bei denen es vorkommt, ein hohes Alter erreichen können.

Je mehr wir die Anzahl der Misgeburten mit Grund verringern können, um desto mehr ist unsere Einsicht in die Krankheiten des Foetus erweitert, und ich hoffe, dafs die jetzt von so vielen Seiten mit der gröfsten Gründlichkeit geführte Untersuchung der Misgeburten dahin führen wird.

Zweitens aber scheint mir daher keine andere Eintheilung der Misgeburten zulässig, als eine beschreibende. Die Eintheilung nach den Ursachen der Misgeburten, so oft sie auch versucht ist, halte ich für gänzlich unbrauchbar. Wer will sagen, ob gröfsere oder geringere

Energie im Zeugungsact ein in einander Greifen der Keime veranlafst; welche Ursache läfst sich auch nur entfernt denken, warum die Eingeweide in dieser oder jener Lage vorkommen?

Wüfsten wir das, so wüfsten wir Alles in der physischen Welt.

Seit acht Jahren habe ich mich daher einer blofs auf die Bildung der Misgeburten selbst beziehenden Eintheilung in meinen Vorlesungen bedient.

Ich theile die Misgeburten erstlich in zwei grofse Klassen ein, je nachdem sie nämlich entweder einfach oder mehrfach sind.

Die aus einem Körper bestehenden oder einfachen Misgeburten sind es entweder

a) der Form,
b) der Lage nach, oder
c) nach beiden.

Jene der Form nach monströsen Foetus haben entweder *a*) eine Bildung, die eine frühere Periode bezeichnet, oder *b*) eine nicht darauf zurückzubringende. Die Unterabtheilungen machen sich nach den monströsen Organen. Man könnte auch noch füglich eine eigene Abtheilung der ersten Ordnung aus den Misgeburten machen, die nur aus einem Theil bestehen, z. B. aus einem blofsen Kopf u. s. w.

Die mehrfachen Misgeburten sind aus zwei oder drei organisch verbundenen Körpern gebildet.

Diese bestehen wiederum entweder aus gleich oder aus ungleich entwickelten Körpern.

Die gleich entwickelten Körper haben sich entweder nur in einzelnen Theilen verbunden, wo man sie nach diesen aufzählt, oder die Körper haben sich so durchdrungen, oder sind so zusammen geschmolzen, dafs zum Beispiel die beiderlei Kopfknochen so verbunden sind, dafs vorne und hinten an dem grofsen Kopfe ein Gesicht, oder vorne und hinten ein Hinterkopf vorhanden ist; dafs beide Stämme nur eine Brust-, eine Bauchhöle ausmachen, wonach wieder abgetheilt wird.

Die ungleich entwickelten sind entweder so beschaffen, dafs der gröfsere den kleinen umfafst, *Foetus in Foetu*, und der kleinere kann an verschiedenen Stellen liegen, wonach am besten die Unterabtheilung geschieht; oder ein mehr oder weniger entwickelter Körper, oder ein

Theil, ist an den andern angehängt, und zwar wieder auf sehr verschiedene Art. — Auf die Misbildungen nach Form und Lage kann bei den mehrfachen Misgeburten noch besondere Rücksicht genommen werden.

Diese Eintheilungsweise bietet den Vortheil dar, dafs man alle in Monographien oder andern Schriften bisher verzeichneten Misgeburten leicht unterbringen, und jeden vorkommenden Fall damit eben so leicht vergleichen kann; etwas das bei der bisherigen Behandlung unmöglich war. Eine gute Uebersicht aller Misgeburten wüfste ich auf keine andere Art zu geben.

Anatomische Bemerkungen

von

H^{rn.} K. A. RUDOLPHI.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 21. October 1824.]

I.

Ueber den Orang-Utang, und Beweis, dafs derselbe ein junger Pongo sei.

Tilesius (1) hat der Naturgeschichte einen sehr wesentlichen Dienst geleistet, wie er die Meinung aufstellte, dafs der kleine (oder eigentlich gewöhnlich allein so heifsende) Orang-Utang mit dem grofsen, oder Wurmb's Pongo (2) Ein Thier sei, während man sie sonst in ganz verschiedene Abtheilungen der Affen brachte, wie auch noch von Cuvier in seinem *Regne animal distribué d'après son organisation* (*Paris* 1817. 8.) geschehen ist, indem er die Orangs (S. 102.) und die Pongos (S. 111.) weit auseinander stellte. Späterhin hat er jedoch auch die Vermuthung aufgestellt, dafs der Pongo ein erwachsener Orang-Utang sei, wie sein Bruder (F. Cuvier *Des Dents des Mammifères* I. *livr. Paris* 1821. 8. *p.* 10.) angiebt.

---

(1) Naturhistorische Früchte der unter Krusenstern vollbrachten Erdumseglung. St. Petersburg 1813. 4. S. 109-130. Bemerkungen über den Jocko oder Orang-Outang von Borneo, *Simia Satyrus L.* mit zwei schönen Kupfertafeln, Tab. 94. u. 95. des Krusensternschen Atlas.

(2) *Beschryving van de groote Borneoosche Orang-Outang of de Oost-Indische Pongo, door F. Baron van Wurmb. In Verhandelingen van het Bataviaasch Genotschap der Konsten en Wetenschappen. Tweede Deel. Roterdam en Amsterdam* 1784. 8. *p.* 245-261.

Das Thier, welches Tilesius in Macao in China lebendig zu untersuchen Gelegenheit hatte, war weiblichen Geschlechts, ungefähr 30 Zoll lang, mit langen Armen versehen, so dafs diese von der Achselgrube bis zur äufsersten Fingerspitze 27 bis 28 mafsen, während die Entfernung von dem Schenkel bis zur Fufssohle nur 14 bis 15 Zoll betrug. Das Thier war sehr jung, jedoch schon von verhältnifsmäfsig grofser Stärke, und hatte die Nägel an allen vier Daumen, die P. Camper den grofsen Zehen des Orang-Utangs, nach den ihm davon zu Gesicht gekommenen Exemplaren, gänzlich absprechen wollte.

Der grofse männliche Orang-Utang, welchen der Baron v. Wurmb untersuchte, und welcher auch an allen vier Daumen kleine Nägel hatte, war 3 Fufs $10\frac{3}{8}$ Zoll Rheinl. lang, und die Länge der Arme betrug 3 Fufs $\frac{1}{2}$ Zoll. Er spricht zwar von breiten Schneidezähnen und grofsen Eckzähnen des Thiers, jedoch ohne deren Maafse anzugeben, und ohne Frage war dasselbe auch noch nicht völlig ausgewachsen, oder wenigstens kein grofses Exemplar, obgleich Wurmb angiebt, dafs dieser Orang-Utang wegen seiner Stärke schwer zu erhalten sey, und dafs sich auch dieses Thier mit starken abgebrochenen Baumzweigen so heftig zur Wehr gesetzt hatte, dafs es unmöglich war, dasselbe lebend zu fangen.

Die nach Europa lebend gekommenen Orang-Utangs waren, bis auf eine gleich zu nennende Ausnahme, klein und schwächlich und starben bald. Nur das von Abel (1) mitgebrachte Thier nämlich hat sich länger erhalten; doch weifs ich nicht, ob es noch lebt; allein Lawrence (2), der es länger beobachtete, giebt zugleich an, dafs es sich immer mehr dem Pongo in der Bildung zu nähern anfange.

Wenn man die genaue Beschreibung des Orang-Utangs bei dem trefflichen Peter Camper (3) durchgeht, so sieht man auf den ersten

---

(1) Clarke Abel *Narrative of a Journey in the interior of China. Lond.* 1818. 4. *p.* 320. u. *p.* 365., mit einer illum. Abbildung des O. U.

(2) W. Lawrence *Lectures on Physiology, Zoology and the Natural History of Man. Lond.* 1819. 8. *p.* 131. Er sagt auch, dafs Cuvier in einer (nicht gedruckten) Abhandlung die Identität des Orang-Utang und Pongo vermuthe.

(3) Naturgeschichte des Orang-Utang und einiger andern Affenarten. Düsseldorf 1791. 4. §. 186. u. 188.

Blick, welch' ein junges Thier er beschreibt, und er spricht auch selbst davon, indem er der getheilten Beckenknochen und der noch knorpeligen Sesambeinchen erwähnt. Wäre er darauf gefallen, die vordere Wand der Kiefer wegzunehmen, so wäre freilich die Sache gleich entschieden gewesen.

Mir schien Tilesius Hypothese höchst annehmlich, weil ich junge und alte Mandrils (*Simia Maimon*) zu vergleichen Gelegenheit hatte, und den Schedel der jungen Thiere durchaus nicht Pavians-artig fand, wie ich auch in meiner Physiologie (T. I. S. 23.) bemerkte.

Um zur völligen Gewifsheit zu gelangen, liefs ich bei dem jungen Mandril-Schedel auf der einen Seite die Keime der bleibenden Zähne blofs legen, und d'Alton hat denselben in seinen Skeletten der Vierhänder (Taf. VIII. Fig. *d.*) auf das Genaueste abgebildet.

Nach der Zeit bekam unser Museum den Schedel eines Orang-Utangs aus der Sammlung des für die Wissenschaften viel zu früh heimgegangenen Albers in Bremen, und d'Alton hat ihn auf derselben Tafel Fig. *b.*, so wie den Schedel des grofsen Orang-Utangs oder Pongo des Pariser Museums unter Fig. *a.* dargestellt.

Zuerst, wie es gewöhnlich geht, war ich schon sehr erfreut, ihn nur äufserlich betrachten zu können, und ich hielt die nicht dicht aneinander stehenden Zähne, die wenigen Backenzähne, und das lockere Korn der Knochen für hinreichende Beweise; da ich indessen noch immer Zweifel hörte, ob der Orang-Utang ein junges Thier sei, so legte ich, wie bei dem jungen Mandril, auf einer Seite des Schedels die Keime der bleibenden Zähne blofs, und gebe hier davon Abbildungen in natürlicher Gröfse, welche die Sache auf das Bestimmteste entscheiden.

Das Vorhandenseyn der Keime bleibender Zähne im Schedel des Orang-Utangs würde blofs beweisen, dafs es ein junges Thier sei; allein wenn man diese Keime näher betrachtet, vorzüglich die der mittleren Schneidezähne, so ist es klar, dafs der Kopf zu einer sehr bedeutenden Gröfse wachsen müsse, um für dieselben in ihrem entwickelten Zustande Raum zu haben. Alle diese Keime sind noch blofse Kronen ohne Schmelzüberzug, durch welchen sie natürlich an Umfang gewinnen; besonders gilt dies von den Eckzähnen.

Die Gröſse der Keime der bleibenden Schneidezähne ist so beträchtlich, daſs sie in dem jungen Kopfe nicht neben einander Raum haben, sondern der mittlere Schneidezahn liegt vorne, der äuſsere hinter diesem, und zwar so, daſs eine dünne Knochenplatte sie von einander trennt. Ich kann mich nicht erinnern, irgendwo eine ähnliche Einrichtung gesehen zu haben, und sie ist der schlagendste Beweis, daſs der Orang-Utang das Junge eines groſsen Thiers ist, und wahrscheinlich noch einer langen Entwicklung bedarf, denn die andern Zahnkeime sind gegen jene, die früher ausbrechen, noch gewaltig zurück, sowohl die der Eckzähne als die der hinteren Backenzähne.

Die Länge des Keims der Krone des mittleren obern Schneidezahns beträgt etwas über sieben, und die gröſste Breite beinahe sieben Linien; die runde Höle der Krone hat einen Durchmesser von fünf Linien.

Die Schedel des Orang-Utangs, welche Camper (a. a. O.) und Blumenbach (Naturhistorische Abbild. Taf. 52.) abgebildet haben, besitzen nur zwei Backenzähne; das dem Professor Mulder in Gröningen zugehörige Exemplar (1) ist mit zwei oberen und drei unteren Backenzähnen vorgestellt.

Aelter ist der Schedel, den unser Museum besitzt, da sowohl oben als unten auf jeder Seite drei Backenzähne vorhanden sind; eben so viele bildet Fr. Cuvier (a. a. O. Taf. 2.) ab, vermuthet jedoch, daſs dem Orang-Utang eigentlich fünf Schneidezähne zukommen. Unser Illiger (*Prodromus systematis mammalium et avium. Berolini* 1811. 8.) schreibt ihm, wie dem Troglodytes, gradezu fünf Backenzähne zu, jedoch ohne zu sagen, worauf er sich stützt, denn einen Orang-Schedel mit so vielen Backenzähnen hat Niemand gesehen und wird ihn nicht sehen, weil ein so junges Thier nicht in den Kiefern für so viele Zähne Platz hat; und Edw. Tyson (*The Anatomy of a Pygmie. Lond.* 1699. 4. *p.* 65.) sagt ausdrücklich von seinem Orang von Angola oder *Simia Troglodytes*, daſs er auf jeder Seite oben und unten vier Backenzähne habe, während er in der Abbildung nur oben und unten zwei Backenzähne darstellt.

---

(1) Walter Heinr. Crull: *Diss. de cranio eiusque ad faciem ratione. Groning.* 1810. 8. Tab. I. Fig. 1.

Von den drei Backenzähnen, welche bei unserm Orang-Utang-Schedel hervorstehen, sind wie bei einem Kinde, das diese Zahl zeigt, die beiden ersten Milchzähne, und der dritte ein bleibender Zahn, der zwar nicht ganz vollendet ist, jedoch schon zwei ziemlich starke Wurzeln zeigt. Vor ihm liegen im Kiefer zwei Kronen bleibender Zähne, und hinter ihm eine, sowohl im Ober- als Unterkiefer. Die Krone des fünften bleibenden Zahns ist noch gar nicht gebildet, wie ja auch bei Kindern von drei Jahren noch der Keim des sogenannten Weisheitszahns fehlt.

Die Lage der Keime der bleibenden Eck- und Backenzähne beim Orang-Utang ist offenbar der analog, welche wir bei kleinen Kindern finden; nur die der Schneidezähne ist abweichend, wie oben angegeben ist.

Ich glaube hinlänglich dargethan zu haben, dafs aus dem Orang-Utang ein grofses Thier werden mufs, und bei der Aehnlichkeit des Pongo mit jenem, und da kein anderer grofser Affe in Java lebt, so ist es wol für gewifs zu halten, dafs der Orang-Utang ein sehr junger Pongo ist.

Erklärung der Kupfertafeln.

Taf. I. Stellt den auf dem anatomischen Museum in Berlin befindlichen Schedel des Orang-Utangs von vorne vor. Auf der linken Seite sind die Keime der bleibenden Zähne blofsgelegt; man sieht nur den Keim des mittlern obern und untern Schneidezahns, weil die Keime der äufsern Schneidezähne hinter jenen liegen. Neben dem Keim des mittlern Schneidezahns liegt zunächst oben und unten der Keim des Eckzahns, und dieser liegt oben über den Keimen der ersten beiden bleibenden Backenzähne und im Unterkiefer unter denselben.

Taf. II. Stellt denselben Schedel von der linken Seite dar.

1) Der Keim des mittlern bleibenden Schneidezahns.
2) Der Keim des bleibenden Eckzahns.
3) Der Keim des ersten, und
4) der Keim des zweiten bleibenden Backenzahns.
5) Die noch unvollkommenen Wurzeln des schon hervorgetretenen dritten Backenzahns; der Keim des vierten Backenzahns.
   a) Der Keim des bleibenden mittlern obern Schneidezahns von vorne;
   b) derselbe von hinten.
   c) Die Höle der Krone desselben.
   d) Der Keim des obern Eckzahns von vorne;
   e) derselbe von hinten.

Alle Figuren sind in natürlicher Gröfse.

II.

Ueber den Zitterwels.

Der Zitterwels (*Silurus electricus L.*, nach Lacépède *Malapterurus*, oder richtiger *Malacopterurus*) ward den Naturforschern zuerst durch den um die Naturgeschichte vielverdienten Adanson (*Histoire naturelle du Sénégal. Paris* 1757. 4. *S.* 134.) bekannt gemacht, der ihn jedoch auch nur flüchtig beschreibt und ohne seine Gröſse anzugeben. Er sagt: die Franzosen nennten ihn *trembleur*, weil er nicht wie der Rochen (*Torpedo*) ein Einschlafen oder eine Betäubung (*engourdissement*), sondern ein sehr schmerzhaftes Zittern des von ihm berührten Gliedes errege. Das scheint jedoch nur eine Sage. Adanson selbst sagt nicht, daſs er ein solches Zittern empfunden habe, sondern er vergleicht es mit der Empfindung von dem Schlage der Leydner Flasche, und setzt hinzu, daſs man bei der Berührung fallen lasse, was man in der Hand habe. Das ist ja aber grade derselbe Fall bei der Berührung der Zitterrochen.

Wie Adanson jenen Fisch im Senegal gefunden, so fand ihn Forskâhl (*Descriptiones animalium, quae itinere orientali observavit. Havn.* 1775. 4. *p.* 15. 2. 14.) im Nil; er beschreibt ein Exemplar von der Länge einer Spanne, also ein sehr kleines, daher giebt er auch eine sehr geringe Wirkung desselben an. *Motus tremoris levissimus erat, adeo ut ex eius vi et celeritate ineptum sit derivare doloris sensum. Nihil vero electricitati magis convenit quam hic ictus. In manum sublatus piscis, aqua recens extractus, fortiter percutit cauda; fortius si sub ventre tangatur, quam lateribus, et levius, si unum tantum attrectaveris latus.* Das habe ich grade so bei dem Zitterrochen beobachtet. Sehr zweifelhaft scheint mir aber, was Forskâhl hinzusetzt, falls er es nicht an einem ganz erschöpften Fische beobachtete. *In sola caudae verberatione vis consistit; illam enim si tangis, aut illa apprehensa piscem sublevas, nullo te ferit ictu.* Die Berührung des Schwanzes könnte ja unmöglich ohne Erfolg seyn, wenn darin die Kraft gerade säſse.

Forskåhl beschreibt den Fisch ganz richtig, verwechselte ihn jedoch dem Namen nach mit dem Zitterrochen, welches auf der Reise wohl geschehen konnte; wäre Forskåhl kein Opfer derselben geworden, so würde er wohl eine eigene Gattung daraus gemacht haben, welches ihm so schon das Passendste schien.

Broussonet (*Mémoire sur le Trembleur, espèce peu connue de poisson électrique. Mém. de d'Ac. des Sciences de Paris pour* 1782. 4. *p.* 692 bis 698. Tab. 17.) beschrieb ihn als einen Wels. Lebend mufs er den Fisch nicht gesehen haben, da er nur die folgenden wenigen Worte über seine electrische Wirkung hat: *Forskåhl dit, que ses effèts électriques n'étoient sensibles que vers la queue; la peau qui recouvre cette partie nous a paru beaucoup plus épaisse que celle du reste du corps, et nous y avons bien distingué un tissu particulier, blanchâtre et fibreux, que nous avons pris pour les batteries du poisson.* Diefs ist ganz falsch, wie späterhin aus der Beschreibung sich ergeben wird. Uebrigens hat Broussonet Exemplare des Fisches gesehen, die über 20 Zoll lang waren.

Geoffroy hat ein beinahe vierzehn Zoll langes Exemplar in dem grofsen Werk über Aegypten (*Zoologie, Poissons. Tab.* 12. *Fig.* 1.) sehr gut abgebildet. Er läfst auch das electrische Organ des Fisches unter der ganzen Haut liegen, und aus sich kreuzenden Fibern bestehen, zu denen der Nerve der Seitenlinie (*N. vagus*) sich begiebt. Man sieht hieraus, dafs er die erste Untersuchung des Organs angestellt hat (*Mémoire sur l'anatomie comparée des organes électriques de la Raie Torpille, du Gymnotus engourdissant et du Silure trembleur. Annales du Musée d'Hist. nat. T.* I. *p.* 392 bis 407. Tab. 26. 4.), allein seine Abbildung des Organs sowohl in diesem Aufsatz, als in dem gedachten grofsen Werke über Aegypten, ist so roh und ungenügend, dafs man darin weder den Nerven noch das Organ erkennt; es scheint eine flüchtige Skizze aus dem Gedächtnifs.

Cuvier scheint den Fisch kaum selbst untersucht, oder wenigstens ein sehr schlecht erhaltenes Exemplar vor sich gehabt zu haben, denn er sagt (*Regne animal T.* II. *p.* 208.): „*il paroît, que le siége de cette faculté électrique est un tissu particulier situé entre la peau et les muscles, et qui présente l'apparence d'un tissu cellulaire graisseux, abondamment pourvu de nerfs.*"

Tuckey (*Relation d'une expédition au Zaïre. Trad. de l'Anglois. Paris* 1818. 8. *T.* II. *p.* 261.) erzählt von einem Fisch, der im Zaire (*Congo*) gefangen ward, und dem *Silurus electricus* glich. Mir scheint es nach der kurzen Beschreibung völlig derselbe Fisch zu seyn, nur dafs er sehr grofs war, nämlich drei und einen halben Fufs lang. „*Suivant le rapport des naturels, lorsque ce poisson est vivant et qu'on le touche, il communique à la main et au bras une impulsion violente, ou pour employer leurs expressions, il blesse tout à travers du bras.*"

Zu meiner grofsen Freude haben unsere eifrigen ägyptischen Reisenden Hemprich und Ehrenberg uns ein Paar Exemplare gesandt, die im Nil gefangen sind, von der Gröfse, wie sie Broussonet sah, denn das hier abgebildete Exemplar ist fast 21 Zoll lang, und das andere wenig kleiner. Die Farbe war durch den Weingeist verändert, so dafs man die dunkeln Flecke des Rückens nicht mehr erkennen konnte; allein sonst war das eine Exemplar vorzüglich so schön erhalten, dafs es eine genaue Zergliederung erlaubte.

Wenn man die äufsere Haut, wie mit dem auf der ersten Tafel in natürlicher Gröfse vorgestellten Fisch geschehen ist, durschneidet und nach oben und unten zurückschlägt, so erblickt man eine eigenthümliche Haut, die, wie in der Abbildung gut angedeutet ist, aus kleinen länglich rautenförmigen Zellchen besteht, deren Wände blättchenartig an einander liegen. Auf dem Rücken und am Bauche ist diese Haut von der der andern Seite durch eine von der äufsern Haut zu den Muskeln gehende sehnige Haut getrennt. Nach vorne geht diese Haut unten bis an die Kiemen, oben aber mit einem rundlich auslaufenden Fortsatz über die Armflofse und den hintern obern Theil des Kopfes, bis zum Auge hin. Nach hinten geht die Haut freilich anscheinend bis zur Schwanzflofse; allein nur bis etwas hinter die Bauchflofse behält sie ihr zelliges Wesen, und daselbst sieht man blofs eine sehnige Haut, (wie es auch auf der Tafel dargestellt ist,) von der gleich die Rede seyn wird.

Schlägt man diese äufsere Haut zurück, (wie es auf der zweiten Tafel dargestellt ist,) so sieht man, dafs ihre ganze innere Fläche mit einer silber-glänzenden sehnigen (aponeurotischen), aus sich in verschie-

denen Richtungen kreuzenden Fasern bestehenden Ausbreitung belegt ist, auf welcher eigentlich jene äufserlich zu sehenden Plättchen oder Zellen, jedoch nur bis hinter die Bauchflosse, stehen, denn hier erscheint die Sehne äufserlich nackt. An der innern Fläche dieser Sehnenhaut verläuft in der Mittellinie der herumschweifende Nerve, und schickt überall, nach unten und oben, Zweige in die Aponeurose, welche dieselbe durchbohren und sich in die eigentliche Zellenmasse verbreiten. Den Nerven begleitet in der nämlichen Richtung eine aus dem vordern Theile der Aorta entspringende, und sich auf ähnliche Art in das häutige Organ verzweigende Arterie; so wie eine Vene auf eine ganz ähnliche Weise an dem Organe nach vorne verläuft, und sich in die Hohlvene nahe am Herzbeutel öffnet.

Unter dieser sehnigen Haut liegen aber keineswegs die Muskeln, wie Geoffroy (*Ann. du Mus. p.* 402. u. *p.* 407.) sagt, sondern es kommt eine diesem Fisch ebenfalls eigenthümliche, von wenigem Zellgewebe bedeckte, zweite Haut zum Vorschein, die auf der zweiten Tafel (6. 6. 6.) in ihrer natürlichen Lage vorgestellt ist, und die aus einem regellosen flockigen Gewebe besteht, desgleichen ich nirgends weiter gesehen habe. Nimmt man etwas mit der Pincette weg, so bildet es lockere Büschel von unordentlich verlaufenden sehr weichen Fasern.

Schlägt man diese flockige Haut zurück, wie es auf der dritten Tafel dargestellt ist, so sieht man unter ihr die Muskelschicht des Körpers (4. 4.) Man sieht auch einen Nerven seitlich an ihr verlaufen; einen Nervenast des fünften Paars nämlich, welcher mit den Rückenmarksnerven sich verbindet, und unter der Seitenlinie (mehr nach der Bauchseite) nach hinten geht, und hinter der Mitte des Körpers in die Muskelschicht selbst eindringt.

Zu der flockigen Haut aber dringen von innen sehr dünne Zweige der Wirbelnerven (*rami intercostales*).

Aus dieser Beschreibung ergiebt sich also eine gröfsere Zusammensetzung des electrischen Organs im Zitterwels, als bisher angenommen ist. Die unter der Haut (*corium*) liegende, aus kleinen Blättchen und Zellen gebildete, an der innern Seite mit einer Aponeurose bedeckte Haut, zu welcher der *Nervus vagus* geht, ist wol ohne Zweifel

der Haupttheil; es hat auch Geoffroy in seinen Zellchen eine eyweifsartige Materie ([1]) angetroffen; allein dafs die zweite ebenfalls ganz eigenthümliche, mit eigenen Nerven versehene Haut, die auch eben so wenig als die vorige in unserm Wels (*Silurus Glanis*) gefunden wird, gleichfalls zum electrischen Organ gehört, scheint mir aufser Zweifel, und ich begreife nicht, wie Geoffroy sie übersehen konnte. Es ist auch nicht ein einziges Organ, welches den ganzen Fisch umhüllt, sondern ein rechtes und linkes, die, wie ich oben gesagt, sowohl am Rücken als am Bauch durch eine sehnige Scheidewand getrennt sind.

Interessant ist zu sehen, wie auch hier ([2]) die Nerven sowohl zu der zelligen, als zu der flockigen Haut von innen, und in ganz entgegengesetzten Richtungen laufen; findet man sie dünn, so mufs man bedenken, dafs sie auch nur zu dünnen Häuten gehen, von denen sogar die eine zum Theil aponeurotisch, also nervenlos ist. Geoffroy bildet den Nerven des äufsern Organs sehr colossal, allein ganz widernatürlich ab; er hat den Fisch aufserordentlich verkleinert, den Nerven aber vergröfsert.

Vergleicht man die Bildung des electrischen Organs des Zitterwelses mit dem des Zitterrochens und des Zitteraals, über welche ich vor drei Jahren hier ebenfalls zu lesen die Ehre gehabt habe, so geht

---

([1]) A. a. O. S. 402. Ich will seine ganze Beschreibung hersetzen. *L'organe électrique du silure trembleur est étendu tout autour du poisson; il existe immédiatement au-dessous de la peau, et se trouve formé par un amas considérable de tissu cellulaire tellement serré et épais, qu'au premier aspect on le prendroit pour une couche de lard: mais quand on y regarde de plus près, on s'aperçoit que cet organe est composé de véritables fibres tendineuses ou aponévrotiques, qui s'entrelacent les unes dans les autres, et qui par leurs différens entrecroisemens, forment un réseau, dont les mailles ne sont distinctement visibles qu'à la loupe. Les petites cellules ou alvéoles de ce réseau sont remplies d'une substance albumino-gélatineuse. Elles ne peuvent communiquer à l'intérieur, à cause d'une très-forte aponévrose, qui s'étend sur tout le réseau électrique, et qui y adhère au point, qu'on ne peut l'en séparer, sans le déchirer: d'ailleurs cette aponévrose tient seulement aux muscles par un tissu cellulaire rare et peu consistant.*

([2]) Bekanntlich hat Soemmerring darauf zuerst aufmerksam gemacht, dafs die Nerven überall von innen zu ihren Theilen gehen, so wie auch darauf, dafs sie eigentlich nach dem peripherischen Ende hin zunehmen.

eine grofse Verschiedenheit hervor, wenn man auf die äufsere Form sieht, allein das Wesentliche kommt doch überein.

Hoffentlich haben Hemprich und Ehrenberg Gelegenheit gefunden, das Organ ganz frisch zu untersuchen, vielleicht sogar bei dem lebenden Fisch, wo sich leichter das Verhältnifs der zelligen und das der flockigen Haut bestimmen liefse. Geoffroy sagt, dafs jene das Ansehen eines Specks habe, sie mufs also frisch weifs aussehen; bei den im Weingeist erhaltenen Fischen fand ich beide Häute von schwarzer Farbe, und nur die Aponeurose weifs. Von Fett habe ich nichts darin gefunden, das würde sich nicht haben verbergen können; es erscheint auch weder bei dem Zitteraal noch bei dem Zitterrochen in oder an dem electrischen Organ.

Erklärung der Kupfertafeln.

Taf. I.

1. 1. 1. 1. Die äufsere Haut in der Seitenlinie vom Kopfe bis zur Schwanzflofse durchschnitten und nach oben und unten zurückgelegt.

2. 2. Die äufsere Fläche des zelligen oder äufseren electrischen Organs.

3. Vorderer Fortsatz desselben.

4. Hinterer Theil desselben, wo nur die Aponeurose übrig bleibt.

Taf. II.

1. 1. 1. Die äufsere zurückgeschlagene Haut.

2. 2. 2. Die innere oder aponeurotische Fläche des zelligen Organs.

3. 3. 3. Der *Nervus vagus.*

4. 4. 4. Die Arterie.

5. 5. 5. Die Vene des electrischen Organs.

6. 6. 6. Die äufsere Fläche des flockigen oder inneren electrischen Organs.

Taf. III.

1. 1. 1. Die äufsere zurückgeschlagene Haut.

2. 2. 2. Die innere oder aponeurotische Seite der zelligen Haut.

3. 3. 3. Nach oben und unten zurückgeschlagene innere Seite der flockigen Haut.

4. 4. 4. Seitliche Muskeln des Körpers.

5. 5. 5. Ein Ast des fünften Nervenpaars, welcher mit den vordern Rückenmarksnerven Verbindungen eingeht, und so nach hinten verläuft.

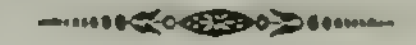
An einigen Stellen hinten sieht es aus, als ob er in Zellen läge, die mit Wasser gefüllt wären.

6. 6. 6. Zwischenrippennerven, *Nervi intercostales.*

7. 7. 7. Dünne Zweige derselben zur flockigen Haut.

Taf. IV.

1. Zurückgeschlagene Kaumuskel.
2. Geöffnete Schedelhöle.
3. Das fünfte Nervenpaar.
4. Ein Zweig desselben (5. 5. 5. auf der dritten Tafel).
5. *Nervus vagus.*
6. Dessen Kiemenast.
7. Der erste Wirbelnerve.
8. Die Arterie.
9. Die Vene des electrischen Organs.



Entwurf
eines phytologischen Pflanzensystems
nebst
einer Anordnung der Kryptophyten

von

Hrn. H. F. LINK.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 15. December 1824.]

Das natürliche System ist keinesweges der Zweck der Wissenschaft, wie Linné wollte; es ist keinesweges die Wissenschaft selbst auf ihren kürzesten Ausdruck gebracht, wie Cuvier meint; aber es ist der Anfang der Wissenschaft, oder der Grund und Boden, woraus die Wissenschaft entspriefst; es liefert die behauenen Steine, woraus das eigentliche Pflanzensystem erbauet wird. Aus dem Spiele mit Aehnlichkeiten wird man bald aufgeregt durch die Frage: wozu denn Dieses diene? und kommt es blofs auf Erkennung der Naturkörper an, um sich derselben zu andern Zwecken zu bedienen, so bleibt immer die Frage, ob nicht das künstliche System weit brauchbarer sei, als das natürliche, besonders wenn man es in aller Strenge anwendet, ohne sich durch das natürliche System von dem geraden Wege ableiten zu lassen.

In allen Naturwissenschaften suchen wir das Gesetz, das heifst, das Beständige in der Mannichfaltigkeit der Begebenheiten und der Erscheinungen. Das Gesetz bestimmt die Bedingungen, unter welchen diese Erscheinung wiederum hervorgebracht wird und hervorgebracht werden mufs, so lange die Natur als solche bleibt. Der Begriff von Art in der Naturgeschichte ist eine solche Gesetzesbestimmung; er bezeichnet die Beständigkeit der Gestaltung in der Reihe der Zeugungen. Es liegt der Begriff von Art nicht allein der ganzen Wissenschaft zum Grunde, sondern die Bestimmung der Arten macht sogar den gröfsten Theil derselben aus. Allerdings haben wir hier eine Menge einzelner

Gesetze, denn jede Art ist ihr Gesetz, aber es ist ein Verlangtes, obwohl nicht immer Erreichtes, diese vielen einzelnen Naturgesetze auf höhere zu bringen, und so die Ableitung von hohen und folglich einfachen Gesetzen darstellen zu können. Soll das System in der Naturkunde irgend einen wissenschaftlichen Werth haben, so mufs es eine solche Ableitung von höhern Gesetzen, wenigstens vorbereiten.

Wir setzen in den höhern Eintheilungen der Naturkörper, wie sie das System liefert, die Bestimmung der Arten voraus, und kümmern uns nicht um die Schwierigkeiten, welche diese hat oder haben kann. Aber wir sollen weiter fortgehen von der Art zur Gattung, zur Ordnung u. s. w. und zwar auf demselben Wege, auf welchem wir zur Bestimmung der Art gelangten, damit wir lernen, die letztere von höhern Eintheilungen abzuleiten. Das Beständige der Gestaltung in der Reihe der Zeugungen unter den verschiedenen Einwirkungen äufserer Einflüsse bestimmten die Art; es mufs also die Beständigkeit der Gestaltung auch in den höhern Eintheilungen dasjenige seyn, worauf wir vor allen andern Bestimmungen sehen müssen. Es wird also das Veränderliche zuerst aus den Kennzeichen aller höhern Ordnungen eben so ausgeschlossen, wie aus den Kennzeichen der Art; und dieses ist die erste Regel, welche wir zu befolgen haben. Davon waren alle Naturforscher überzeugt, sobald sie anfingen über Natursysteme zu urtheilen. Es bleibt der schlimmste Vorwurf, welchen man dem Linnéischen Sexualsystem machen kann, dafs die Zahl der Staubfäden gar oft, die Zahl der Staubwege nicht selten veränderlich ist. Aber wir gehen weiter. Das Veränderliche wird durch Beobachtung gefunden, und wir wenden es entweder nur im Allgemeinen oder Besondern an. Die Zahl der Staubfäden und die davon abhängige Zahl der Blumenblätter und der Kelchblätter kann allerdings nicht als Kennzeichen der Art dienen, an welchen man sie veränderlich beobachtet hat, aber wohl als Kennzeichen anderer Arten, an welchen man sie niemals abändernd gefunden hat. Denn man sieht keinen Grund, warum das Kennzeichen nicht in einem Falle veränderlich, in einem andern hingegen beständig seyn sollte. Aber, indem wir uns von dem Besondern zum Allgemeinen, von der Bestimmung der Arten zur Bestimmung der Gattungen und Ordnungen, überhaupt zur höhern Eintheilung begeben, verlangen wir, dafs dieses

in Folge eines Grundsatzes geschehen solle, welcher auf die Bestimmung der Art den gröfsten Einflufs hat, oder der Art die Bestimmung giebt, des Grundsatzes nämlich, welcher die Beständigkeit der Natur ausspricht. Es wird hieraus folgern, dafs in der Bestimmung höherer Abtheilungen und Ordnungen nicht allein die Kennzeichen ausgeschlossen werden, welche wie bei den Arten in dem besondern vorliegendem Falle, sondern welche in irgend einem Falle innerhalb des ganzen Gewächsreiches oder wenigstens in den Normalgewächsen veränderlich gefunden wurden.

Die Naturforscher sind ins Geheim von diesem Grundsatze geleitet worden, ohne ihn auszusprechen. Nachdem Morison gesagt hatte, die Kennzeichen der Gattungen im Pflanzenreiche müsse man nur von dem letzten Zwecke der Vegetation *(finis ultimus)*, der Blüte und Frucht hernehmen, hat es kaum einer oder der andere Naturforscher gewagt, die Blätter zur Bestimmung der Gattungen und höheren Abtheilungen zu Rathe zu ziehen, ungeachtet man Morison sehr gut einwenden konnte, die Blüte sowohl als die Frucht sei nur der künftigen Blätter wegen vorhanden. Aber die Beobachtung, wie leicht das Blatt von der ungetheilten zur getheilten Gestalt übergehe, ergriff die Beobachter so sehr, dafs sie sogleich das Blatt als höchst veränderlich für die höhere Eintheilung der Gewächse verwarfen. Einige sprechen dieses klar aus, andere nehmen es stillschweigend an, ohne sich darüber zu äufsern. Sie bedenken nicht, dafs es weit weniger in die Augen fallende Kennzeichen sind, als diese Zertheilung, wodurch das Blatt nicht weniger als die Blüte sich das Recht erwirbt, als Quelle von Kennzeichen für höhere Abtheilungen angesehen zu werden.

Die Beständigkeit des Merkmals ist also die Bedingung, ohne welche es nicht als auszeichnendes Merkmal anerkannt wird. Aber giebt es einen Rang unter diesen beständigen Merkmalen? Sind einige mehr geeignet, die höhern Abtheilungen zu bestimmen, als andere, und welche müssen zur Bestimmung der Gattungen, welche zur Bestimmung der Familien, Ordnungen und Klassen ausgewählt werden? Es ist nothwendig, bei dem Grundsatze zu bleiben, nach welchem wir die Arten unterschieden haben, wenn wir nicht die höhern Abtheilungen einer blofsen Willkühr überlassen wollen, bei der Veränderlichkeit der Merkmale. Da wir nun für diese Abtheilungen alle diejenigen Kennzeichen ausge-

schlossen haben, welche an irgend einer ausgebildeten Pflanze veränderlich befunden worden, so bleibt uns hier kein anderer Unterschied übrig, als zwischen der gröſsern und geringern Leichtigkeit, womit die Kennzeichen in einander übergehen könnten. Da die Nerven eines Blattes sich gegen den Umfang immer mehr zertheilen, so ist der Uebergang aus einem ganzrandigen zum gesägten Blatte viel leichter, als aus einer Blattscheide zu einem eingesenkten Blattstiele, wo die Wendung aller Gefäſsbündel im Umfange des Stammes nach einer Seite erfordert wird, um den Stiel zu bilden. Eben so kann die Verlängerung eines oder mehrerer Blumenblätter vor den übrigen viel leichter geschehen, als die Verwandlung einer Blüte mit unten stehenden Fruchtknoten in eine andere mit dem Fruchtknoten in der Mitte. Mit Recht hat man das Kennzeichen, ob der Embryo aufrecht oder verkehrt im Samen liege, der Gestalt der Frucht und des Samens zu den höhern Abtheilungen weit vorgezogen, weil viele Aenderungen nöthig sind, um aus der aufrechten Lage eine verkehrte zu machen. Ob die Pflanzen mit einem oder zwei Blättern keimen, könnte nur ein sehr untergeordnetes Kennzeichen, höchstens nur zur Unterscheidung der Gattungen geben, aber der ganze Bau des monokotyledonen Embryo ist so sehr von dem Baue des dikotyledonen verschieden, daſs man dieses Kennzeichen mit Recht an die Spitze aller Abtheilungen gestellt hat.

Der Uebergang aus einer Gestalt in die andere kann als Entwickelungsstufe angesehen werden. Denn in jeder Verschiedenheit kann man ein Mehr oder Weniger finden, und in jeder Verschiedenheit zweier Gestalten folglich einen Schritt zur gröſsern Entwickelung. So erheben wir uns auch in der Betrachtung dieser Gegenstände, und entfernen uns immer mehr von dem dürren Namenverzeichniſs der Naturkörper, welches, obwohl nothwendig für andere Zwecke, doch niemals als sein eigener zu betrachten ist. Das System wird auf diese Weise eine Entwickelungslehre, und die Entwickelungslehre führt uns auf die Entstehung des Gegenstandes, welche zu kennen der höchste Zweck der Wissenschaft ist.

Aber es ist nicht nothwendig, daſs alle Theile eines und desselben Naturkörpers auf einer und derselben Stufe der Entwickelung stehen, sondern ein Theil kann weiter fortgerückt seyn, als der andere. Wir

sehen Pflanzen mit Schmetterlingsblüten, deren Blätter höchst unentwickelt sind; wir sehen Acacien mit höchst zusammengesetzten Blättern, deren Blüten sehr einfach sind. Es entsteht nun die Frage: Wie verhalten sich die Theile zu einander nach den Stufen ihrer Entwickelung, und giebt es Gesetze, welche diese Verhältnisse aussprechen? In einer Abhandlung über diesen Gegenstand (Abhandlungen der Königl. Akadem. d. Wissensch. v. J. 1822-1823. S. 157.) habe ich folgende Gesetze festgestellt:

1) Indem ein Theil auf derselben Stufe der Entwickelung stehen bleibt, gehen alle andere für sich ihre Reihen der Entwickelung durch. Es ist das Centrifugalgesetz der Bildungen.
2) Befinden sich alle Theile auf ähnlichen Stufen der Entwickelung, so kommen diese Gestalten häufig vor, und sind nur in geringen Abweichungen von einander verschieden.
3) Befinden sich aber die Theile auf verschiedenen Stufen der Entwickelung, so kommen solche Gestalten nicht allein seltener vor, sondern ein Theil hat auf den andern Einflufs, so dafs die Entwickelungsstufen der Theile dadurch einander genähert werden. Es ist das Centripetalgesetz der Bildungen.

Die Verwandschaften der Pflanzen stellen also nicht eine einfache Reihe vor, oder einen Kreis, oder eine Ellipse, oder auch einen Stamm, eine Wurzel, sondern eine Reihe von veränderlichen Gröfsen. Man bezeichne die Haupttheile der Pflanzen mit a, b, c, d, e u. s. w. Man bestimme für jeden Theil die Entwickelungsstufen a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, und b, b^{I}, b^{II} u. s. w., so wird sich jede Pflanze nach ihrer Verwandschaft, oder ihrer Stelle im natürlichen System ausdrücken lassen, wenn man alle Glieder der Reihe, jedes auf seiner gehörigen Stufe beständig setzt. Es bedeute a den Stamm oder vielmehr die Gestalt des Stammes, b eben so das Blatt, c den Blütenstand, d die Blüte, e die Frucht. Nun läfst sich ein Gras überhaupt folgendermafsen ausdrücken $= a + b + c^{x} + d + e$ indem die Gestalten aller Theile sehr einfach sind, und nur der Blüthenstand sich veränderlich zeigt, auf dieselbe Weise, wie an andern Gewächsen. Für ein bestimmtes Gras müfste nun noch dieser Blütenstand, als eine höchst einfache Aehre c, wie an *Monerma*, oder als mehr zusammengesetzte c^{I}, wie an *Triticum* u. s w. bestimmt

werden. Eine Orchidee würde sich durch $a + b^{\text{I}} + c^{\text{I}} + d^{\text{IV}} + e^{\text{III}}$ ausdrücken lassen, da die Blüte als Lippenblüte einen bedeutenden Grad von Ausbildung erreicht hat, und eben so die Frucht als dreifächerigte vielsamige Kapsel. Es giebt in der Natur gar selten scharfe Abschnitte zwischen den Gestaltungen, daher wird es oft nöthig seyn, die Mittelstufe zu bezeichnen, welches sich durch $a^{-\text{I}}$, $a^{\text{I}-\text{II}}$, $a^{\text{II}-\text{III}}$ u. s. w., oder genauer $a^{<\text{I}}$, $a^{\text{II}>\text{III}}$ u. s. f. ausdrücken läfst. Wenn ein Glied mit b^0 bezeichnet in der Reihe vorkommt, so würde dieses bedeuten, dafs der Theil zwar fehle, der Ort dafür aber vorhanden sei.

Eine solche Reihe bezeichnet die natürliche Stelle eines Gewächses nur in Rücksicht auf eine bestimmte Klasse, Ordnung oder Unterordnung. Der Ausdruck a^{III} als beständig für eine höhere Ordnung, kann innerhalb der Grenzen von a^{III} für eine niedere Ordnung veränderlich seyn. Es ist eine geringere Veränderung, der Uebergang aus einer in die andere ist leichter möglich, und eben darum auch die Gestaltung mehr für eine niedere Ordnung bestimmend. Eben so ist es mit den Theilen selbst. Für eine höhere Ordnung müssen a, b, c, d, e Theile bedeuten, welche für eine niedere Ordnung in kleinere zerfallen, und folglich mufs die Zahl der Glieder vermehrt werden, wenn die Reihe für eine Unterordnung gelten soll. So verwandeln wir die Reihen für höhere Ordnungen in Reihen für niedere, wenn wir sowohl die Theile, oder die Gröfsen selbst als ihre Exponenten in kleinere zerlegen.

Nicht alle Verbindungen können wir in der Natur nachweisen, sondern wir treffen auf manche Lücken, welche vielleicht in der Zukunft ausgefüllt werden möchten, vielleicht in einer Vorwelt ausgefüllt waren, und in einer Nachwelt seyn werden. Jene Formeln machen uns aufmerksam auf die Lücken, und lehren uns einigermafsen im Voraus die Formen zu bestimmen, welche noch könnten entdeckt werden.

Einige Veränderungen leiden jene Reihen durch das dritte Gesetz, welches verursacht, dafs die Glieder der Bestimmungsreihe von einander abhängig sind. So ist z. B. d^{III} nicht einerlei in der Reihe, welche mit a^{I} anfängt, und in der Reihe, welche mit a^{III} anfängt. So haben die Orchideen eine Lippenblume, aber sie ist doch anders gebildet, als die Lippenblume der Labiaten. Um jedoch die Vergleichung nicht zu verlieren, ist es durchaus nothwendig, Theile und Gestalten nach

der Analogie zu benennen, und ihnen nicht nach den verschiedenen Ordnungen verschiedene Namen zu geben. Es ist sehr zu tadeln, wenn man den Stamm der Gräser nicht *caulis* sondern *culmus* nennt, und wenn gar Hedwig für den Stamm der Moose einen besondern Namen *surculus* ersinnt. Es ist durchaus kein Grund vorhanden, warum man den Früchten der Lichenen einen andern Namen giebt, als den Früchten der Pilze. So hat man oft mit Unrecht auf Nebenbestimmungen gesehen, indem man die Kunstwörter in der Wissenschaft bestimmte, und der vielblättrigen Blume den Namen einer *corolla labiata* versagt, da es doch nur auf die Gestalt überhaupt ankam. Am unrechten Orte hat man hier oft zu grofse Genauigkeit angewandt, und bei dem Blicke auf das Einzelne den Blick auf das Ganze verloren. Da wo es der allgemeinen Bestimmungen bedarf, müssen auch solche angewendet werden, und wo sie nicht vorhanden oder übersehen sind, mufs man sie hervorheben oder machen.

Das zweite Gesetz hat nicht sowohl Einflufs auf die phytologische Bestimmung der natürlichen Ordnung durch jene Reihen, als auf die Technik des natürlichen Systems, wie es gewöhnlich zusammengestellt wird. Man fand, dafs solche Ordnungen, welche man allgemein für natürlich erkennt, sehr viele Gattungen und Arten haben; es sind nämlich solche, wo alle Theile des Gewächses auf derselben Stufe der Entwickelung stehen. Nun forderte man aber durchaus im ganzen Gewächsreiche solche gleichsam gerundete natürliche Ordnungen, und um diese hervorzubringen, rechnete man einzeln stehende Gattungen den schon bestehenden Ordnungen an, wenn sie gleich in vielen Stücken nicht damit übereinkamen; so wurde *Eryngium* eine Umbellate, *Cassia* eine Leguminose u. s. w. Ja sehr oft erklärte man geradezu, dafs man die Gattung vorläufig nur zu einer schon bestehenden Ordnung bringe, indem man hoffe, dafs daraus eine natürliche Ordnung erwachsen werde, wenn man noch mehr Arten kennen lerne. Diese Hoffnung ist allerdings hier und da erfüllt worden; so sind die Gattungen *Cucullaria* und *Qualea*, jede aus ein oder zwei Arten bestehend, bereits zu einer ziemlich ansehnlichen natürlichen Ordnung herangewachsen. Aber wenn dieses auch hin und wieder geschieht, so mehren sich doch zugleich die

Arten der gröſsern Ordnungen so sehr, daſs im Grunde dasselbe Verhältniſs bleibt, wenn es auch nicht mehr so auffallend ist, als vorher.

Dieses Bestreben nach gerundeten natürlichen Ordnungen, dieses Anreihen der Mittelgattungen oder einzeln stehenden Gattungen an schon bestehende Ordnungen ist nicht ganz zu tadeln, und durch alles Tadeln wird man es doch nicht verbannen. Denn die Art tritt individuell auf, und da sich auf Kenntniſs der Arten alle Kenntniſs der höhern Abtheilungen gründet, so verlangt man diese Individualität überall. Darum will man keine Mittelgattungen, keine einzeln stehende von ungewisser Stellung, sondern man verlangt Ordnungen, welche aus mehreren Gattungen und Arten bestehen, wie die Art nur vorhanden ist, wenn sich mehrere Individuen zu derselben finden.

Wir mögen daher die natürlichen Ordnungen beibehalten, ja die ganze Technik des natürlichen Systems, nur wollen wir jeder natürlichen Ordnung die gehörige Bestimmungsreihe vorsetzen. Pflanzen, welche mit der Bestimmungsreihe ganz überein kommen, sind *habitus genuini*, angehörende; Pflanzen, welche in einem oder dem andern Stücke abweichen, sind *habitus deliquescentis*, oder angenommene. So ist *Eryngium* eine angenommene Gattung in der Ordnung der Doldengewächse, *Cassia* in der Ordnung der Leguminosen u. s. w. Es sind solche Pflanzen, bei denen einzelne Glieder der Bestimmungsreihe, welche sonst für die ganze Ordnung beständig sind, veränderlich werden. Wir mögen ferner auch diejenigen natürlichen Ordnungen beibehalten, welche nach einem oder einigen wenigen Theilen gebildet sind, ohne daſs man auf alle übrigen Rücksicht genommen, wie dieses eigentlich mit den Leguminosen der Fall ist, wo man nur auf die Hülse (*legumen*) sieht, und gar nicht auf die Blume, wie bei der Sippschaft der Mimosen, bei der *Ceratonia Siliqua* u. a., oder gar nicht auf die Blätter, wie bei vielen Neuholländischen Pflanzen, *Platylobium* u. dgl. Hier ist nur ein Glied der Bestimmungsreihe beständig, alle anderen sind veränderlich. Eben so mögen wir auch die natürlichen Ordnungen beibehalten, für welche sich kein einziges bestimmtes Kennzeichen angeben läſst, sondern viele kleine Kennzeichen den Charakter der Ordnung bilden, wie dieses mit den *Urticeae* der Fall ist. Hier sind alle Glieder der Bestimmungs-

reihe veränderlich. Aber ihre Veränderungen sind innerhalb bestimmter Gränzen eingeschlossen, oder schwankend zwischen zwei nahe gelegenen Grenzen. Endlich muſs man wohl Rücksicht darauf nehmen, daſs man manche natürliche Ordnungen zum ersten Range erhoben hat, welche nur in einem unteren Range stehen sollten. So hat Brown mit Recht gesagt, daſs verschiedene kleine natürliche Ordnungen wie sie Jussieu in den Monokotyledonen angenommen, oder wie er selbst sie bestimmt hat, eigentlich in eine, die *Liliaceae*, sollten zusammengestellt werden. Die Bestimmungsreihe für jene natürliche Ordnungen kann nur eine niedere seyn, als für die *Liliaceae*.

Soll die Ordnung der Natur sich deutlich darstellen, so ist es nöthig, nicht allein die Bestimmungsreihe beständig vor Augen zu haben, sondern auch in ihr die Reihe der Zeichen unverändert zu behalten. Oder mit andern Worten: Wir werden das wahre natürliche System nie kennen lernen, so lange man die Kennzeichen nach Willkühr bald von diesem, bald von jenem Theile nimmt, und viele ganz als ohne Bedeutung verwirft. Es ist nothwendig, alle Theile durchzugehen, und zwar nach der Ordnung durchzugehen, zu bestimmen, ob sie veränderlich oder beständig sind, auch die Gränzen innerhalb welcher die Veränderlichkeit fällt. Es kann oft vorkommen, ja es ist sogar nothwendig, daſs eine Art oder Gattung in mehreren natürlichen Ordnungen oder Abtheilungen aufgeführt werde, wenn die Gestaltung zwischen zwei Stufen fällt. Ueberhaupt wird man davon abgehen, eine Reihe sowohl der Ordnungen selbst, als der Familien und Gattungen herauszwingen zu wollen, welche den Gesetzen der natürlichen Verbindungen ganz widerspricht; ein altes Andenken an die Idee von einer Leiter der Natur.

Nach diesen Grundsätzen wollen wir nun zu den Eintheilungen selbst fortgehen. Es ist nicht genug, bei den allgemeinen Abtheilungen stehen zu bleiben, sondern wir müssen wenigstens bis zu den Gattungen selbst herabsteigen, um die Gliederung eines solchen Systems bemerklich zu machen. Eine solche Darstellung kann aber nicht der Gegenstand einer einzelnen Abhandlung seyn, dafür ist der Umfang des Pflanzenreiches viel zu groſs; wir wollen also nur den Anfang des Systems liefern, und in der Fortsetzung gelegentlich weiter gehen. Ein

System, welches auf die Entwicklungsstufen des Pflanzensystems gegründet ist, mufs von dem Einfachen anfangen, und von diesem nach und nach zum Zusammengesetzten fortschreiten.

Die fünf Klassen, in welche die Pflanzen nach ihren Entwicklungsstufen einzutheilen sind, habe ich bereits in der Abhandlung über die natürlichen Ordnungen der Gewächse (s. Abhandl. für 1822-1823) angegeben.

Cl. I. *Cryptophyta.*

Wurzel, Stamm und Blätter sind nicht von einander getrennt.

Wurzel, Stamm und Blätter sind in einen Theil übergegangen, den wir, sofern er zur weitern Verbreitung der Pflanze dient, mit Acharius, *thallus* und deutsch Sprofstheil nennen wollen. Doch hat Acharius das Wort nur auf die Lichenen angewandt. Das Wesentliche des Sprofstheiles, welches jener Schriftsteller übersah, besteht darin, dafs die Pflanze durch ihn fortwächst, oder Sprossen treibt. Ich habe diesen Begriff von *thallus* in *Element. Philos. botan. Berol.* 1824. *p.* 196. festgesetzt.

Die Zellen des Zellgewebes sind klein, rundlich, unregelmäfsig neben einander gelegt oder zusammengehäuft. Sie bilden dadurch Membranen oder zusammengesetzte rundliche Haufen. Aufser diesen Zellgeweben, giebt es auch noch lange Zellen oder Faserzellen, welche entweder Röhren ohne Querwände, oder auch Röhren mit Querwänden darstellen. Sie sind entweder einfach oder verästelt, und stellen den Uebergang von der Zelle zum Fasergefäfs vor. Endlich giebt es noch Zellen von verschiedener Gröfse einzeln zwischen den Faserzellen zerstreut, und in einigen seltenen Fällen besteht die ganze Pflanze aus solchen grofsen Zellen *(Phallus)*. Es scheint als ob die Natur auf diesem zu einfachen Wege nicht weiter konnte, und daher bald in ihren Bildungen stehen blieb.

Es ergeben sich daraus für die innere Bildung folgende Entwicklungsstufen.

1. Der Sprofstheil fehlt ganz und gar. Zwischen Fehlen und Fehlen ist aber ein grofser Unterschied. Oft fehlt ein Theil so, dafs auch nicht ein analoger Theil dafür vorhanden ist, welches ich *(Elem. Phil.*

bot. p. 64.) carere genannt habe. Deutsch mag es Fehlen heifsen. So fehlen den Kryptophyten die Blätter. Oder ein Theil fehlt so, dafs die analoge Stelle dafür sogleich erkannt wird, welches ich (das.) *deficere* genannt habe, und welches man deutsch Mangeln nennen kann. So mangelt die Blumenkrone in *Alchemilla.* Alles Fehlen macht ein Hauptkennzeichen, aller Mangel ist unbedeutend. Hier tritt der Mangel nur in Rücksicht auf die unterste Bildungsstufe ein und fällt mit ihr zusammen, welches aber keinesweges im Pflanzenreiche immer der Fall ist. Wir treffen diesen Mangel nur bei den Pilzen an.

Die unterste Bildung in Rücksicht auf die Structur ist, wo der Sprofstheil ganz und gar aus einfachen oder ästigen Röhren besteht, mit oder ohne Querwände. Wir wollen diesen Sprofstheil, den flockigen nennen. Die Röhren sind von einander gesondert, oder auch mit einander verwebt und verflochten. Diese Bildung ist der Uebergang aus der Zelle zum Fasergefäfs, welches auf eine doppelte Weise geschehen ist; die Zellen haben sich nämlich an einander gereiht, wodurch Querwände entstanden sind, oder die Zellen haben sich verlängert, und in eine Röhre ohne Querwand verwandelt. Die Pflanze ist hier gleichsam in ihre Gefäfse aufgelöset, und das, was in andern Gewächsen innerlich war, ist hier äufserlich geworden. Die Röhre, wie überhaupt die Bildung mit Querwänden steht auf einer untern Stufe, als da wo die Querwand völlig verschwunden und die Bildung gelungen ist, der Sprofstheil der Schimmel giebt ein Muster von dieser Bildungsstufe.

2. Der Sprofstheil besteht aus einfachen gewundenen Fasern, welche ganz gefüllte Röhren oder dichte Fäden zu seyn scheinen. Ich finde solche Röhren oder Fasern in *Spongia lacustris.* Es ist immer schwer zu sagen, ob ein zarter Theil hohl sei oder nicht; hier spricht die Dicke und Gleichförmigkeit des einzelnen Fadens dafür dafs er dicht ist.

3. Der Sprofstheil besteht aus Bündelweise zusammenliegenden, geraden, einander durchkreuzenden Röhren. *Coenogonium.* Ein eigener, sonderbarer Bau.

4. Der Sprofstheil hat ein gleichförmiges Innere, nämlich in Rücksicht auf seine Structur und die einfachen Theile *(partes similares)* woraus er besteht. Es ist hier nicht von Keimkörnern, Fruchtbehältern,

Gliederungen u. dgl. die Rede, wodurch allerdings ein Gewächs in seinem Innern sehr ungleichförmig werden kann, sondern nur von den Zellen, Fasergefäſsen, Membranen, woraus die Pflanze zusammengesetzt ist. Viele Algen.

5. Der Sproſstheil besteht aus kleinen Zellen, welche mehr oder weniger rundliche Haufen bilden. Diese Haufen stellen Keimkörner oder Knospen (Gemmen) vor. *Lichenes crustacei.*

6. Die Hauptstufe der Bildung ist wo der Ueberzug aus kleinen rundlichen Zellen, die Mitte hingegen aus langen Faserzellen besteht. Dieser Bau ist dem Baue der vollkommenen Pflanzen analog, indem die kleinen Zellen im Umfange die Rinde, die Faserzellen in der Mitte das Holz vorstellen. Doch aber leidet er manche Verschiedenheiten. Die Faserzellen welche meistens einfach, seltner ästig sind, auch öfter keine Querwände haben, zeigen sich zuweilen ganz trocken, so daſs sie Haaren oder Baumwolle gleichen, wie in den Lichenen, zuweilen gallertartig, wie in den Tangarten. Es mangeln zuweilen die Faserzellen, wie in *Gyrophora*, oder es mangelt der rundzellige Ueberzug auf den untern Seiten, wie in manchen Lichenen. Der äuſsere Ueberzug besteht auch wohl aus gallertartigen Zellen, und nimmt den ganzen Sproſstheil ein, bis auf wenige, zerstreute, oft kleine Faserzellen, wie in *Collema.* Sehr selten finden sich neben den verfilzten Faserzellen noch andere in ein Bündel aus gleichlaufenden Fasern zusammengelegt wie in *Usnea.*

Diese innere Bildung nennen wir Structur, und bezeichnen sie mit *St.*, also die Stufen mit 1 *St.*, 2 *St.* u. s. w. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir die Zahlen vor, nicht oben an das Zeichen setzen, wie vorhin geschehen ist, obgleich der Ausdruck der Stufenfolge durch Exponenten naturgemäſser seyn möchte, als durch Coefficienten.

Zwar haben die Kryptophyten keine wahre Wurzel, aber viele derselben wurzeln doch im Boden, und oft besitzen sie daher einen oder mehrere Theile, welche man Wurzel nennen kann. Wenn wir also die äuſsere Gestalt dieser Gewächse bestimmen wollen, müssen wir zuerst von der Wurzel reden. Einigen fehlt die Wurzel ganz und gar, und diese verhalten sich auf eine doppelte Art. Die Wurzel = *R.* fehlt ihnen 1) weil der Sproſstheil überall wurzeln kann, oder weil er durchaus Wurzel ist wie der flockige. In diesem Falle nimmt der

Sprofstheil auch zuweilen die Form der Wurzeln an, wie sie sich an den vollkommenen Pflanzen finden; eine Bildung, welche zwar selten aber doch an einigen Pilzen vorkommt. Oder die Wurzel fehlt auch, weil 2) die Pflanze gar nicht wurzelt. Dieses findet bei einigen Wassergewächsen statt, selten auch bei einigen Gewächsen, welche lose auf der Erde liegen oder unter der Erde sich befinden. Oder die Pflanzen wurzeln 3) mit der ganzen untern Fläche ohne besondere Theile. Die Theile wodurch diese Pflanzen wurzeln, sind 4) Warzen oder Verlängerungen. Endlich befindet sich an einigen 5) eine schildförmige Wurzel. Die drei letzten Wurzelungen sehen wir an den Lichenen.

Die Gestalt des Sprofstheils $= F$ erscheint 1) unbestimmt, so dafs von ihm etwas genommen oder ihm hinzugesetzt werden kann, ohne die Gestalt im Wesentlichen zu ändern, wie der flockige Sprofstheil der Pilze. Sie ist ferner 2) ganz rundlich; die unentwickelte Gestalt des Samens darstellend, wie bei den Nostochien. Oder sie zeigt sich 3) aus mehreren Individuen zusammengesetzt; eine Näherung zur unbestimmten Gestalt, z. B. die Zusammensetzung des Lichenenkörpers. Hat sich nun der Sprofstheil vollkommen zur Individualität ausgebildet, so erscheint er 4) artikulirt, aus mehreren Stücken bestehend, als Uebergang zur zusammengesetzten Gestalt, wie wir es an vielen Algen sehen, oder nicht artikulirt, und dann 5) mehr in die Breite ausgedehnt, blattartig, oder 6) mehr in die Länge ausgedehnt, eigentlich stammartig. Beide Gestaltungen kommen in der Ordnung der Algen vor.

Nach dem Sprofstheile kommt der Fruchttheil zur Untersuchung. Die Kryptophyten haben zweierlei Fruchttheile, wodurch sie sich fortpflanzen. Die ersten sind die Keimkörner *(sporonia, sporonulae)*; Körner, welche durch die ganze Substanz des Gewächses verbreitet sind, und auf der Oberfläche überall, oder nur an einigen Stellen hervortreten. Diese Keimkörner habe ich an vielen Pilzen schon früher beobachtet, und zwar mit den wahren Fruchtbehältern zugleich, aber ihnen keinen besondern Namen gegeben; auch schliefse ich nur analogisch, dafs die Pflanze durch sie vermehrt wird. In den Algen hat sie Vaucher als die Samen seiner Gattung *Polyspermes* angegeben, aber ebenfalls nicht von den Fruchtbehältern geschieden. Hedwig sah sie als die männlichen Geschlechtstheile der Lichenen an. Cassini säete sie aus,

und erhielt daraus junge Pflanzen, eine Beobachtung, welche durch die wiederholten und genauen Versuche von G. F. W. Meyer nicht allein bestätigt; sondern auch vollkommner dargestellt ist. Es scheint, daſs die Keimkörner den Gemmen anderer Pflanzen ähnlich sind, und also das Individuum fortsetzen, da hingegen die Körner in den Fruchtbehältern dem Stamm analog scheinen und nur die Art fortsetzen mögen. Die Vermehrung durch Keimkörner, als allen Kryptophyten eigen, und nur wenig Verschiedenheiten zeigend, denn die Entwicklung an der Oberfläche nähert sich nur einer bestimmten, tritt also nicht in die Reihe der Bildungsstufen ein, ausgenommen wenn der Fruchtbehälter fehlt.

Die Reihe der Bildungen für die Kryptophyten geht von einem doppelten Ursprunge aus; entweder von dem Sproſstheile oder dem Fruchttheile. In der Gattung *Sporotrichum* sehen wir nur den flockigen Sproſstheil, oft ungeheuer ausgebreitet, und Keimkörner; in der Gattung *Caeoma* dagegen nur Fruchtbehälter und eine Andeutung vom Sproſstheil in dem Flecken des Blattes, worauf sich der Brand entwikkelt. Von beiden Seiten treffen die Formen zusammen; der Fruchtbehälter bildet sich mehr aus, und fängt sogar an, selbst, unabhängig von dem Sproſstheile, welcher zugleich vorhanden ist, zu wurzeln und wurzelähnliche Theile zu bilden, wie wir an einigen Arten von *Agaricus* deutlich sehen; der Sproſstheil bildet sich ebenfalls aus und verwandelt sich in einen Theil, welcher die Pflanze nicht mehr durch Fortwachsen und Entwickeln neuer Theile vermehrt und vergröſsert, aus Faserzellen besteht mit rundlichen Zellen verwebt, der Frucht zwar zur Unterstützung dient, aber doch von ihr gesondert ist. Diesen letzten Theil hat man *Stroma*, Unterlage genannt, und man sieht ihn an vielen Pilzen von gar verschiedener Gestalt. Das Schwanken der Gestaltung zwischen Fruchtbehälter und Sproſstheil mag die erste Stufe des Fruchtstandes seyn, welchen wir als analog dem Blütenstande, oder der Inflorescenz mit *J* bezeichnen wollen. Dann folgt 2) die Gestaltung wo der Fruchtbehälter in dem Sproſstheile seine Entwicklung nicht allein beginnt, sondern sie auch vollendet, und nun die Samen auswirft, wie es mit vielen Algen der Fall ist. Endlich 3) die Gestalt, wo der Fruchtbehälter innerhalb des Sproſstheiles die Entwicklung zwar anfängt aber nicht beendet, sondern ganz äuſserlich wird, und auf der Oberfläche hervortritt.

Da keine männliche Geschlechtstheile zu finden sind, da beim Keimen auch die Fruchtkörner sich gerade zu verlängern, ohne irgend eine Umhüllung abzuwerfen, so bleibt es zweifelhaft ob man diese Fruchtkörner Samen oder wie die Keimkörner Gemmen nennen soll. Ich habe ihnen daher den Namen *sporae*, Fruchtkörner, nicht Samen, gegeben, und dem Theile worin sie eingeschlossen, oder welchem sie zunächst angeheftet sind, den Namen Fruchtbehälter *(sporangium)* = *Sp.* Er fehlt zuerst oft gänzlich, und an der Stelle der Fruchtkörner pflanzen Keimkörner die Pflanze fort. Wenn die Fruchtkörner 2) ganz nackt sind, so kann man nicht immer mit Sicherheit bestimmen, ob das einzelne Korn wirklich nur eine *spora* oder schon ein *sporangium* ist, und dann nenne ich das Fruchtkorn ein *sporidium*, eine *sporidia*. Zuweilen 3) liegen die Fruchtkörner innerhalb des Sprofstheils oder des *stroma* zerstreut, und nur durch ihre Gröfse von den Keimkörnern verschieden, wie in den Tremellen. Die Fruchtkörner befinden sich 4) an oder in dem Fruchtbehälter zusammengehäuft; sie sind 5) in längliche Schläuche *(thecae)* eingeschlossen, und diese wiederum in einem Fruchtbehälter verborgen, oder diese Schläuche überziehen 6) den Fruchtbehälter auf seiner äufsern Fläche. Unter Nr. 4 gehören auch die Formen, wenn in einem Fruchtbehälter mehrere kleinere, und in diesem erst die Fruchtkörner befindlich sind, so wie unter Nr. 5 und 6 die Formen gehören, wo in einem Schlauche mehrere kleine sind.

Nachdem wir nun die Theile der Kryptophyten nach ihren Entwicklungsstufen durchgegangen sind, wollen wir die Verknüpfungen derselben aufsuchen. Wir haben zuerst: $1\,St. + 1\,R + 1\,F + 1\,J + 1\,Sp.$ in einer Schimmelgattung, welche ich *Sporotrichum* genannt habe. Setzen wir zuerst das letzte Glied veränderlich, so kommen die ersten Glieder mit $2\,Sp.$ in den Schimmelgattungen *Botrytis, Aspergillus* u. s. w. vor; mit $3\,Sp.$ in *Tremella*; mit $4\,Sp.$ in *Lycoperdon* u. s. w.; mit $5\,Sp.$ in *Sphaeria*; mit $6\,Sp.$ in *Agaricus* u. s. w. Nur $1\,J$ erscheint zuweilen als $3\,J$ oder $5\,J$ aber höhere Formen von R und F kommen nicht vor. Kurz wir haben die Bezeichnung $1\,St. + 1\,R + 1\,F + 1\,.\,3\,.\,5\,J + x\,Sp.$ für die Pilze. Dieses giebt eine wohl gesonderte, und daher als sehr natürlich erscheinende Ordnung.

1 *St.* + 1 *R* + *F* + 3 *J* + 4 *Sp.* ist *Spongia lacustris.* Ich habe daran deutliche Fruchtbehälter und zwar in Menge gefunden, auch von bedeutender Gröſse fast wie ein Hirsekorn, von *Panicum germanicum*, groſs. Die Schale des Behälters *(peridium)* ist ziemlich dick, aber zerbrechlich, von braunrother Farbe, und hält eine Menge loser Fruchtkörner eingeschlossen. Es ist sehr wahrscheinlich, daſs in der Gattung *Spongia* noch andere Verknüpfungen vorkommen, deren Untersuchung sehr zu wünschen wäre. *Spongia lacustris* gehört dem Thierreiche viel weniger an, als manche Algen.

3 *St.* + 3 *R* + 3 *F* + 3 *J* + 6 *Sp.* ist das sonderbare *Coenogonium.* Wahrscheinlich giebt es in den Tropenländern noch andere Verknüpfungen mit diesem merkwürdigen Sproſstheile.

4 *St.* oder die inwendig gleichförmige Structur ist auf mannigfaltige Weise verknüpft. Sie kommt vor ohne Wurzel und mit einer Wurzel, besonders mit einer schildförmigen, mit einem ganz runden, blattförmigen und stammförmigen Sproſstheile, mit Fruchtbehältern, welche innerlich bleiben oder auf die Oberfläche treten, und endlich mit Fruchtbehältern von verschiedenem Baue, doch nicht mit den höhern, ausgebildeten Formen derselben. Wir rechnen alle diese Gestaltungen zu den Algen. Doch sind Fälle, in welchen sie sich schwer von den Pilzen unterscheiden lassen, und *Bystus Jolithus* ist bald in diese bald in jene Ordnung gebracht worden. Man kann nicht deutlich sehen, ob die Fäden hohl oder gefüllt sind; im erstern Falle wären diese Gewächse unbezweifelt Pilze, aber sie scheinen der Färbung wegen vielmehr gefüllt. Die Fäden derselben sehen allerdings aus, wie die aufrecht stehenden Fäden der Schimmelarten, aber die Keimkörner bleiben innerlich, und werden innerlich entwickelt und ausgeworfen, da sie hingegen in den Schimmelarten sich äuſserlich sammlen. Daher möchte ich sie zu den Algen rechnen. Aber *Byssocladium,* welches die Algologen zu den Algen bringen. ist unbezweifelt ein Pilz, weil es die oben angegebnen Kennzeichen der Pilze hat.

Eine sonderbare Form, zu diesen Reihen gehörig, finden wir an den Nostochien. Das Gewächs ist eine gallertartige, innerlich gleichförmige Kugel, in welcher Faserzellen sich befinden, durch häufige Quer-

wände so abgetheilt, dafs sie Reihen von rundlichen Zellen scheinen. In diesen Faserzellen entwickeln sich Keimkörner und schwellen oft so sehr an, dafs man sie für Fruchtkörner halten möchte. Die umgebende Gallerte schwindet nach und nach in dem Uebergange der Formen, und *Batrachospermum* ist das Innere der Nostochien für sich ausgebildet, und nur noch mit einem schlüpfrigen Ueberzuge versehen.

Die inwendig gleichförmige Bildung kann zuweilen nur so erscheinen, weil die gallertartigen Faserzellen sich nicht völlig entwickelt haben. Sie geht also zu der letzten Bildung über und die Tangarten folgen auch in der Reihe der Algen.

5 *St.* oder der durchaus rundzellige Sprofstheil, welcher Gemmen darstellt, und die krustenförmigen Lichenen scharf bezeichnet, wurzelt immer nur mit der untern Fläche, hat eine unbestimmte Form und äufserliche Fruchtbehälter (3 *J*), wenn sie auch innerlich scheinen, denn immer zeigt sich eine entsprechende Oeffnung in dem Ueberzuge des Sprofstheils. Nur der Bau der Fruchtbehälter ist verschieden und $= x\,Sp.$ zu setzen wie in den Pilzen. Wir würden also hier wieder eine ausgezeichnete natürliche Ordnung haben, wenn nicht die Kruste der Lichenen sich in einen blattartigen Sprofstheil wirklich verwandelte und auch sonst auf mannichfaltige Weise dahin überginge.

Die höchste Form 6 *St.* des Sprofstheils, welche den vollkommnen Pflanzen am nächsten steht, vereinigt sich nicht mit den niedrigen Stufen der Wurzelung und der Gestalt des Sprofstheiles, auch nicht mit der untersten Stufe des Fruchtstandes, sonst aber mit allen andern Gestaltungen. Die Gewächse, welche einen solchen Sprofstheil haben, rechnen wir bald zu den Algen, bald zu den Lichenen. Wir sehen also hieraus, dafs eine scharfe Trennung zwischen diesen beiden natürlichen Ordnungen nicht vorhanden ist, und dafs Linné Recht hatte, wenn er sie vereinigte.

Aber die Zahl der Gattungen und Arten ist für eine natürliche Ordnung zu grofs, und umgekehrt ist die Zahl der natürlichen Abtheilungen zu grofs, wenn man sie alle trennen wollte. Wir wollen also nach der Bequemlichkeit verfahren, und die natürliche Ordnung der Lichenen herausziehen, die übrigen aber unter dem Namen der Algen vereinigt lassen. Die Ordnung der Lichenen wird bestimmt durch den krusten-

artigen oder vielmehr gemmenartigen Sprofstheil 5 *St.* und denjenigen, worein er übergeht. Dieses ist der Sprofstheil mit trocknen haarförmigen Faserzellen im Innern, den wir kurz den blattartigen nennen wollen. Hieran schliefsen sich der Aehnlichkeit wegen die Gyrophoren, denen die Faserzellen im Innern nur mangeln, und *Collema*, an denen die Faserzellen, durch die gallertartige zellige Umgebung von einander getrennt und entfernt sind. Auch mag man *Coenogonium* wegen der Aehnlichkeit der Fruchtbehälter mit den Fruchtbehältern der Parmelien hierher rechnen.

Eine richtige Einsicht von der Verwandschaft der Algen und Lichenen, so wie der Kryptophyten überhaupt, wird man nie erhalten, wenn man die Aehnlichkeiten nicht systematisch entwickelt, wenn man den Blick unbestimmt auf der Mannichfaltigkeit der Erscheinungen umherschweifen läfst, und nach Willkühr die Ordnungen vereinigt und trennt. Und wenn man auch Willkühr anwendet, so mufs man nur wissen dafs es Willkühr ist, welche man angewendet hat. Man trenne immerhin die Lichenen von den Tangarten, wenn man nur weifs, dafs der Tang ein unter das Wasser gesetzter Lichen ist, in welchem die trocknen Faserzellen zur gallertartigen Form aufgeweicht sind, und das Wasser die Fruchtbehälter verhindert hat, sich ganz nach aufsen zu kehren und zu entwickeln. Auf die Eintheilungen kommt weniger an, als auf den Schlüssel, welcher uns den Sinn derselben öffnet.

O. 1. *Fungi.*

Der Sprofstheil ist flockig, oder mangelt ganz und gar.

Die Bedeutung dieser Bestimmung, und die Reihe für die Pilze ist in dem Obigen deutlich genug angegeben worden. Es kommt hier also nur auf die Unterabtheilungen an. Der Sprofstheil hat in der ganzen Ordnung dieselbe Gestalt, und sein Mangel kann keine Kennzeichen geben; es kann also nur das Verhältnifs des Sprofstheiles zum Fruchttheile und dieser selbst in Betrachtung gezogen werden. In Rücksicht auf jenes Verhältnifs befindet sich der Fruchttheil entweder auf dem Sprofstheil oder wird von dem letztern bedeckt, oder er steht neben dem letztern, in welchem Fall der Sprofstheil auch mangelt. Hiernach

werden drei Unterordnungen bestimmt und zwar: 1. *Mucedines*, Schimmelpilze; 2. *Fuligines*, Brandpilze; 3. *Mycetes*, Schwammpilze.

Subordo 1. *Mucedines.* Schimmelpilze.

Der Sprofstheil dieser Pflanzen ist 1) gegliedert, oder an bestimmten Stellen mit Scheidewänden versehen, erscheint auch immer hohl und durchsichtig, oder er hat 2) keine Scheidewand, erscheint daher auch inwendig oft dicht und undurchsichtig. Er geht in dem letzten Falle nicht selten in eine Unterlage *(stroma)* über. Zwischen beiden Gestalten giebt es Uebergänge, wo nämlich die kleinen Fäden oder deren Spitzen nur Scheidewände haben, nicht die grofsen. Wir wollen diese zur zweiten Abtheilung rechnen. Diese Gestaltung des Sprofstheils setzen wir $= A$ *(articulatio)*. In Rücksicht auf die Frucht liegt er 1) entweder ganz nieder, und trägt die Fruchtkörner und Fruchtbehälter überall, oder 2) einzelne Fäden stehen aufrecht um Fruchtkörner oder Fruchtbehälter zu halten, oder 3) die Fäden zerfallen durchaus in Fruchtkörner. Hieher kann man 4) die Gestaltung bringen, wo die Enden der Fäden sich zusammenballen und dem Anscheine nach Fruchttheile machen. Wir bezeichnen dieses durch *St.* *(situs)*. Betrachten wir den Fruchtstand $= F$ genauer, so finden wir 1) die Fruchtkörner auf dem Sprofstheil zerstreut, an unbestimmten Stellen, oder 2) in der Mitte angehäuft, wo nicht selten der Sprofstheil später verschwindet, und eine Trennung vom Fruchttheil und Sprofstheil anfängt, oder 3) die Früchte befinden sich an der Spitze, seltener an der Seite der Fäden lose zusammengehäuft, oder 4) sie sind an den Seiten oder an der Spitze regelmäfsig gestellt, oder sie stehen 5) auf Fäden, als auf besondern Stielen. Die Früchte selbst $= Sp.$ sind 1) einfache Körner, 2) doppelte Körner, zwei dicht zusammengestellt oder mit einer Scheidewand, 3) mit Anhängseln versehen, 4) mit mehreren Scheidewänden, 5) in einem Behälter *(sporangium)* eingeschlossen, 6) nicht allein in einem Behälter, sondern auch innerhalb desselben in Schläuche *(asci)* eingeschlossen.

Habitus genuini.

$$1\,A + 1\,St. + 1\,F + 1\,Sp.$$

Die einfachste Form. Sprofstheil mit Scheidewänden, niederliegende Flocken, zerstreute einfache Fruchtkörner. Sie entstehen oft

aus eingeschnürten Zellen; zuweilen werden sie wohl als eine Flüssigkeit abgesondert.

Sporotrichum, Byssocladium, Alytosporium, Coccotrichum. Die letzte Gattung ist zweifelhaft; die zweite scheint mit der ersten zu vereinigen zu seyn, *Capillaria Pers.* ist ganz zu verwerfen, so wie seine *Hypha* und *Fibrillaria*; sie sind Sproſstheile anderer Pilze.

Der Fruchttheil variirt: + 2 *Sp.* mit doppelten Fruchtkeimen; *Trichothecium*; + 3 *Sp.* und + 4 *Sp.* mangeln; + 5 *Sp. Eurotium,* mit einem wahren *sporangium*; + 6 *Sp. Erysibe,* mit einem wahren *sporangium* und innerhalb Schläuchen.

Der Fruchtstand variirt mit dem Fruchtbehälter zugleich. Also + 2 *F* + 1 *Sp.* oder in der Mitte gehäufte aber einfache Fruchtkörner: *Sepedonium, Fusisporium*; + 2 *Sp.* und + 3 *Sp.* mangeln; + 4 *Sp.* Fruchtkörner mit Querwänden, *Epochnium, Bactridium*; die letzte Gattung weicht etwas ab, und nähert sich den Algen; + 5 *Sp.* und + 6 *Sp.* mangeln. Diese Reihe mit 2 *F* nähert sich schon den Schwammpilzen, deren Fruchtbehälter für sich bestehen. + 3 *F* und + 4 *F* mangeln und jenes scheint sogar zu fehlen; + 5 *F* oder von den Spitzen der Fäden getragene einfache (also 1 *Sp.*) Fruchtkörner finden sich nur in *Acremonium, Verticillium.*

Die beiden ersten Glieder dieser Verbindung, der Sproſstheil mit Querwänden und darnieder liegenden Fäden mögen der ersten Familie *Byssaceae* oder *Byssinae* zu Kennzeichen dienen.

+ 1 *A* + 2 *St.* + 1 *F* + 1 *Sp.*

Der Sproſstheil hat Querwände, wie in der vorigen Familie, aber aufrechte Fäden machen den Anfang zur Stielbildung. In diesem ersten Falle liegen die einfachen Fruchtkörner zerstreut an und zwischen den Fäden. Hierher gehören: *Acladium, Goniosporium, Camptoum, Sporophleum.* Der Fruchttheil geht in 2 *Sp.* über, zu doppelten Fruchtkörnern in *Polythrincium.*

2 *F* mangelt. Aber 3 *F* an bestimmten Stellen zusammengehäufte Fruchtkörner kommt häufig vor und zwar mit 1 *Sp.* oder einfachen Körnern in *Haplaria, Haplotrichum, Botrytis, Polyactis, Aspergillus, Penicillium, Coremium.* In der letzten Gattung wickeln sich die Fäden schon zusammen zu einer Unterlage. Doppelte Fruchtkörner (+ 2 *Sp.*) hat *Diplosporium.*

4 *F* wirtelförmig gestellte Fruchtkörner oder Behälter ohne Scheidewände (1 *Sp.*) finden sich an *Stachylidium*, oder 4 *Sp.* mit Scheidewänden an *Dactylium*.

5 *F* Fruchtbehälter an den Spitzen der Fäden kommen nur mit 5 *Sp.* wahren Fruchtbehältern vor in *Mucor, Sporodinia, Thamnidium, Thelactis, Syzygites, Stilbum, Pilobolus.* Die Gattung *Thamnidium* hat Keimkörner an den Spitzen der Fäden, oder auf Stielen, *Thelactis* hat regelmäſsig gestellte Keime auf den Spitzen der Fäden. An manchen Arten von *Stilbum* ist der Sproſstheil dicht zur Unterlage verflochten wie an *Coremium.*

Diese Familie, bezeichnet durch den Sproſstheil mit Scheidewänden und die aufrechten Fäden, mag *Aspergillaceae* oder *Aspergilleae* heiſsen.

+ *A* + 3 *St.* + 1 *F* + 1 *Sp.*

Der Sproſstheil zerfällt ganz und gar in Fruchtkörner. Höhere Formen als die angegebenen scheint der Bau dieser Gewächse nicht zuzulassen. Man kann nur die Gattung *Oidium* durch die zarten, weiſsen Fäden ihres Sproſstheils von den Gattungen unterscheiden, welche schwarze, gröbere Fäden haben, nämlich: *Tetracolium, Torula, Monilia, Alternaria.* Diese durch das Zerfallen des Sproſstheils in Fruchtkörner scharf bezeichnete Familie mag: *Oideae* heiſsen.

2 *A* + 1 *St.* + 1 *F* + 1 *Sp.*

Der Sproſstheil hat keine Scheidewände, wenigstens nicht durchaus, sehr oft ist er aber an den Enden der Fäden gegliedert. Auf der einen Seite nähert sich der Sproſstheil einer Unterlage, auf der andern geht er zu den Algen über und ist oft schwer davon zu unterscheiden. Mit niederliegenden Fäden, zerstreuten, einfachen Körnern ist die erste Gestaltung in *Acrothamnium, Colletosporium, Gonytrichum, Menispora, Circinotrichum.* Auſser diesen kommen noch gegliederte Fruchtkörner (4 *Sp.*) in *Helicotrichum, Scolicotrichum* vor. Die letzte Gattung hat besonders Algengestalt.

2 *St.* + 1 *F* + 1 *Sp.* Aufrechte Fäden mit zerstreuten, einfachen Fruchtkörnern in: *Chloridium, Cladosporium, Oedemium, Myxotrichum, Campsotrichum, Actinocladium, Conoplea, Coelosporium.* In den Gattungen *Cladosporium* und *Oedemium* schnürt sich der Sproſstheil an den Spitzen oder hier und da zusammen um Fruchtkörner zu bilden. *Myxosporium*

besteht aus Fruchtkörnern in eine gallertartige Masse verbunden, zu denen die Unterlage, oder auch der Fruchtbehälter zu fehlen scheint. *Coelosporium* weicht wegen der hohlscheinenden Fruchtkörner ab. Gegliederte Fruchtkörner (4 *Sp.*) haben: *Helicosporium, Arthrinium, Helminthosporium.*

+ 2 *F* mangelt. + 3 *F*, Fruchtkörner an der Spitze der Fäden gehäuft, und zwar einfache Fruchtkörner + 1 *Sp.* kommt in dem sonderbaren *Phycomyces* vor, dessen Sprofstheil sehr algenartig ist. Aber das Hervortreten der Fruchtkörner auf der äufsern Fläche nähert das Gewächs den Pilzen.

4 *F* + 1 *Sp.* Regelmäfsig angewachsene einfache Fruchtkörner finden sich nur an *Spondylocladium.*

Dematium ist eine Gattung, dem Sprofstheile nach, hierher gehörig, aber ohne Früchte. Wir wollen die ganze Familie deren Sprofstheil nicht gegliedert ist, sonst mit allen Veränderungen des Fruchttheils, die folgende ausgenommen, verbunden, *Conopleaceae* nennen.

1 *A* + 4 *St.* + 1 *F* + 1 *Sp.*

Ist die sonderbare Form, wo die Enden der Fäden zusammengeballt Fruchttheile darstellen. In der Reihe der ungegliederten Pilze ersetzt sie die Stelle, welche die ganz in Fruchtkörner zerfallenden Pilze (3 *St.*) in der Reihe der gegliederten (1 *A*) einnehmen. Hierher gehören *Racodium, Antennaria, Amphitrichum.* Wir mögen diese fünfte Familie *Racodiaceae* nennen.

Habitus deliquescentis.

Ozonium gleicht gar sehr dem blofsen Sprofstheile der Schwammpilze, doch hat man noch keine Früchte daran wahrgenommen.

Einige Arten von *Mucor* haben an der Basis des Stiels steife, gleichsam Wurzeln vorstellende Fäden, daher sonderte sie Ehrenberg in eine besondere Gattung *Rhizopus.* Eben so sind die Fruchtbehälter vieler Arten von *Erysibe* mit steifen Fäden umgeben, welche in die andern Fäden des Sprofstheils übergehen. Diese Schimmelpilze machen den Uebergang zu den Schwammpilzen, wo der Fruchtbehälter für sich wurzelt.

Phragmotrichum Kze ist eine sehr sonderbare Gattung, welche wegen der innerlichen Fruchtbehälter sich den Algen sehr nähert.

Subordo 2. *Fuligines.* Brandpilze.

Die Reihe fängt mit *Trichothecium* an, dessen Sprofstheil in eine rundliche Form zusammengewebt, die Fruchtkörner umschliefst. Dann folgen *Trichoderma* und *Myrothecium*, wo der Sprofstheil eine im Anfang flüssige Masse von Fruchtkörnern umgiebt. Hierher kann man ferner alle Pilze rechnen, welche aus einer flüssigen Masse entstehen, und dieses ist zugleich das beste Kennzeichen der Unterordnung. An einigen, z. B. *Aethalium (Fuligo Pers.)* sieht man deutlich wie ein zarter Sprofstheil den Fruchttheil umgiebt; an andern aber, schliefst er beim Austrocknen so dicht an die übrigen Theile, dafs man ihn nicht gesondert wahrnimmt. Doch bemerkt man sehr deutlich, wie eine Membran von dem Fufse des Pilzes sich verbreitet, und von hieraus als dem Pilze dicht anliegend zu verfolgen ist. Zuweilen lös't sich der Sprofstheil in Schuppen auf, wie man besonders an *Spumaria* und an einem *Physarum*, welches ich *stromateum* nenne, sehen kann. Die Verschiedenheiten des Fruchtbehälters bestehen darin, dafs er bald gestielt bald ungestielt ist, welches aber wegen der vielen unbedeutenden Uebergänge nicht zu den Kennzeichen der Gattungen zu rechnen ist, ferner, dafs er bald einen schuppigen, bald einen glatten Ueberzug hat, bald eine, bald mehr Fruchthüllen, inwendig bald gar keine, bald wenige, bald viele Haare und diese unregelmäfsig oder regelmäfsig verwebt, und endlich inwendig mit einer Mittelsäule oder ohne dieselbe, und dann oft nur mit einer Andeutung, oder einer rundlichen Erhebung, welche zur Säule übergeht. Alle diese Gestalten finden sich auf sehr mannichfaltige Weise mit einander verknüpft. So entsteht folgende Reihe: *Trichoderma, Myrothecium, Aethalium, Lignydium, Lycogala, Diphtherium, Licea, Tubulina, Physarum, Cionium, Diderma, Didymium, Leocarpus, Leangium, Didyderma, Trichia, Arcyria, Stemonitis, Dictydium, Cribraria, Cupularia, Craterium.*

Myriococcum Fries gehört ohne Zweifel hierher, aber zu einer besonderen Reihe. Der zarte, weifse, flockige Sprofstheil bedeckt ganz und deutlich gesondert die vielen kleinen, runden, mit einander verwachsenen Fruchtbehälter mit Fruchtkörnern gefüllt. Sie scheinen im Anfang flüssig gewesen zu seyn. Es wäre also eine höhere Form von *Trichoderma.*

Sobald diese Pilze trocken werden, hört die Verbreitung der Masse auf, und nur so lange sie flüssig sind, wuchern sie fort. Auch in dieser Rücksicht kann man sie so betrachten, als ob sie in dem Sproſstheile eingeschlossen wären.

Uebrigens ist diese Entwicklung und Ausbildung des Gewächses aus einer flüssigen Masse, in welcher aber das Vergröſserungsglas die Fruchtkörner schon deutlich zeigt, eine merkwürdige Erscheinung in der organischen Natur.

Diese zweite Unterordnung macht nur eine Familie aus, die den Namen *Fuligineae* behalten kann.

Subordo 3. *Mycetes.* Schwammpilze.

Der Sproſstheil sondert sich von den Fruchttheilen ganz und gar, wird ein Nebentheil und verschwindet oft ganz. Er zeigt keine Verschiedenheiten, und weicht daher aus der Klasse der Kennzeichen.

Statt des Sproſstheils tritt die Unterlage *(stroma)* ein, welche eben so sehr zum Fruchttheile gehört, denn sie verbreitet sich nicht weiter, nachdem sie einmal gebildet ist, setzt also die Pflanze nicht fort und wuchert nicht wie der Sproſstheil. Sie steht in der Mitte zwischen den beiden Theilen die sie ungesondert begreift. Diese Unterlage ist zuweilen nur angedeutet durch einen Flecken, durch einen dünnen Ueberzug, oder sie mangelt ganz und gar, wo man den Mangel durch die gehäufte Stellung der Fruchtbehälter nur erkennt. Dieses ist der erste Zustand der Unterlage = *Str.* In der zweiten Entwickelungsstufe ist sie deutlich vorhanden und von den Fruchtkörnern oder den Fruchtbehältern deutlich unterschieden. Auf der dritten Stufe ist sie wirklich zu dem geworden, was sie andeutet, zum Fruchtbehälter, und der Fruchttheil hat sich vom Sproſstheile völlig geschieden.

Die Gestalt der Unterlage = *F* ist 1) unbestimmt ausgebreitet, als ein flacher mehr oder weniger dicker Ueberzug. Er bildet 2) eine rundliche Masse, oder 3) einen mehr oder weniger verlängerten Träger, der in seltenen Fällen 4) verästelt ist.

Dem innern Baue *(fabrica)* nach = *f*, besteht sie 1) aus Faserzellen mit andern rundlichen Zellen durchwebt und verbunden. Bald herrscht die Faserzelle, bald die rundliche Zelle vor. Auch liegt wohl

ein bedeutender Unterschied darin, dafs die Faserzellen entweder aus den gegliederten oder ungegliederten Flocken des Sprofstheiles entstand, doch ist er sehr schwer in der Natur zu bestimmen. Am meisten ausgebildet ist der innere Bau, wo das Aeufsere aus rundlichen Zellen besteht, das Innere aus Faserzellen, welche mit einander verwickelt und verwebt sind, wie in den Lichenen, welchen wir daher durch $3f$ ausdrücken wollen. In einigen Fällen ($2f$) liegen die Fasern dicht und gleichlaufend zusammen, ohne, wenigstens ohne viele rundliche Zellen, so dafs der Bau dem Splinte der vollkommenen Pflanzen gleich zu setzen ist. Wir wollen dieses mit *fa* bezeichnen. Auch ist darauf zu sehen, doch nur für Abtheilungen einer niedern Stufe, dafs zuweilen die Zellen sehr bald schwarz werden und in einem verkohlten Zustand gerathen (*fc*), in andern Fällen hingegen das Gewächs sein ganzes Leben hindurch weich und gefärbt erscheint (*fnc*), nicht wie dort gleichsam bei lebendigem Leibe abstirbt. Es ist mir kein Beispiel bekannt, dafs ein Pilz zufällig aus einem Zustande in den andern übergegangen wäre. Die rothe Färbung ist am häufigsten in dieser Ordnung, dann folgt die gelbe, seltner ist die blaue und am seltensten die grüne; ja die rein grüne Farbe der Blätter und Algen kommt fast nie vor. Am häufigsten ist in den weichen, nicht verkohlten Pilzen, der Mangel an Färbung, oder die weifse Farbe. Selten sind auch die verkohlten Theile aus gefärbten entstanden, gewöhnlich aus weifsen, welches man im Innern des Gewächses erkennt.

Der Fruchtbehälter (= *Sp.*) ist oft gar nicht vorhanden, sondern die Fruchtkörner sind 1) äufserlich auf der Unterlage oder dem Boden zerstreut, oder auch 2) von der Unterlage eingeschlossen. In seltenen Fällen mangeln die Fruchtkörner ganz und werden durch Keimkörner ersetzt. Die Fruchtbehälter umschliefsen 3) die Fruchtkörner, die sich auch 4) in besondern ausgezeichneten Fruchtbehältern oder 5) in Schläuchen befinden. Diese Schläuche sind 6) auf der Oberfläche des Fruchtbehälters ausgebreitet, oder 7) auf besondern Trägern (*sporophora*) des Fruchtbehälters befindlich.

I. $1\,Str. + 1\,F + 1\,f + 1\,Sp.$

Hier ist entweder gar keine Unterlage vorhanden, oder nur eine Andeutung derselben, eine besondere Färbung der Theile worauf der

Pilz sich befindet. Dann ist auch nothwendig die äufsere Gestalt unbestimmt, und die innere nicht entwickelt. Die Fruchtkörner aber schreiten in der Ausbildung sehr fort; sie sind rund, länglich, spindelförmig, doppelt, mit Querwänden: Verschiedenheiten, welche zur Unterscheidung niederer Abtheilungen dienen können. Auch sind sie gestielt oder nicht. Hier ist der Anfang des Gewächsreiches aus einem Fruchtbehälter.

Diese Gewächse entstehen unter der Oberhaut lebendiger Pflanzen, und sind dann nicht verkohlt. Hierher gehören: *Caeoma, Spilocaea, Sporisorium, Septaria, Phragmidium, Puccinia, Podisoma. Sporisorium* ist eine sonderbare Zusammensetzung von dieser und der ersten Unterordnung; es finden sich nämlich zwischen den Körnern zerstreute Flocken. *Podisoma* ist die höchste Form, welche schon den Tremellenartigen Pilzen nahe steht.

Unter der Oberhaut trockner Pflanzen entsteht *Cryptosporium.* Eine Art *C. aurantiacum* ist nicht verkohlt.

Oben auf trocknen Blättern und trocknem Holze liegen *Fusidium* und *Conisporium.* Die letztere Gattung rechne ich hierher. Längliche Fruchtbehälter aber ohne deutliche Fruchtkörner sind mit einem Staube, wahrscheinlich Keimkörnern bedeckt, und machen längliche Haufen, welche frei auf trocknem Holze liegen.

Verkohlt sind: *Cryptosporium atrum*, welches man wohl als eine besondere Gattung trennen könnte. *Hypodermium, Melanconium, Didymosporium, Stilbospora, Sporidesmium.*

Phoma Fries. Die Fruchtkörner liegen in kleinen Haufen zusammen und sind von der Oberhaut eingeschlossen. Im Anfange sind sie weifs und zusammenklebend, dann werden sie schwarz.

Melanosorium. An dem untern Stamme der Orobanche-Arten zeigt sich eine sonderbare Krankheit. Der Stamm schwillt auf, und enthält kleine zerstreute Haufen von schwarzen, kleinen, runden Fruchtkörnern. Ich habe das Gewächs nur trocken gesehen, wie es mir von dem verstorbenen Palissot de Beauvois zugesandt wurde.

Myxosporium. Ist *Nemaspora crocea Pers.* an der ich keine, von dem Holze, worauf dieser Pilz wächst, verschiedene Unterlage entdecken konnte, welche doch bei den andern Arten der *Cytospora* vorhanden

scheint. Der Name *Nemaspora* schien mir zu verwerfen, da er sehr verschieden gebraucht ist.

II. 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 2 *Sp.*

Ohne Unterlage. Die Fruchtkörner sind in dem Fruchtbehälter wie Keimkörner enthalten. Hierher könnte man *Dothidea sphaeroidea* (*Sphaeromorphium*) und *Sclerotium durum* (*Leucostroma*) rechnen, welche von den Gattungen zu trennen sind, womit man sie vereinigt hat.

III. 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 3 *Sp.*

Die Fruchtbehälter umschliefsen die Fruchtkörner, haben aber keine deutliche Unterlage.

Mit halbirtem Fruchtbehälter, welche vielleicht zur zweiten Unterabtheilung zu rechnen sind: *Actinothyrium* und *Leptothyrium*.

Mit ganzem, nicht verkohltem Fruchtbehälter: *Taphria*, der Gattung *Caeoma* verwandt. — Ferner *Sporigastrum*. *Amphigastrum*.

Sphaeropleum und *Botrydium*, zwei neue Gattungen von Ehrenberg in Aegypten gefunden. Sie wachsen beide auf der Erde.

Saccidium Schmidt, habe ich nicht gesehen.

Dichosporium Nees, eine sonderbare Form, inwendig mit Fruchtkörnern, äufserlich mit Keimkörnern.

Es ist zweifelhaft, ob bei allen diesen die Unterlage Fruchtbehälter geworden.

Mit ganzem, verkohltem Fruchtbehälter.

Apiosporium Kze ist noch nicht ganz verkohlt.

Prosthemium Kze ist eine *Stilbospora* unter der Hülle, oder *Stilbospora* ist ein *Prosthemium* ohne Hülle.

Spermodesmia Kze ist mir nicht genau bekannt, so wie *Pilidium ej.*

Chaetomium ist ein *Exosporium* wo die Unterlage sich zum Fruchtbehälter ausgebildet hat, die äufsere haarähnliche Umgebung dagegen unfruchtbar geworden ist.

Stegia Fries, *Cytospora Ehrenb.*, *Sphaeronema* sind Anfänge von *Sphaeria*.

Dothidea pyrenophora Fries, ist eine eigene Gattung (*Pyrenochia*). Das Aeufsere gleicht einer *Sphaeria*, das Innere besteht aus einer weifsen, erweichbaren Masse, das Innerste aus einem Haufen schwarzer pulveriger Körner.

Elpidophora Ehrenb., eine sonderbare Gattung auf den Palmenblättern in Aegypten.

Schizoderma. Hierher müssen die *Hysteria Fr.* gebracht werden, welche eine bestimmte Gestalt aber keine Schläuche haben, sondern an deren Statt Fruchtkörner.

IV. 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 4 *Sp.*

Keine Unterlage, innerhalb des gröfsern Fruchtbehälters kleine, runde Fruchtbehälter. Hierher weifs ich nur *Polyangium* zu rechnen.

V. 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 5 *Sp.*

Keine Unterlage. Die Fruchtkörner in Schläuchen (*thecae*), welche der Fruchtbehälter umschliefst.

Sphaeria. Da diese Gattung noch einmal in der Reihe anzuführen ist, welche mit 2 *Str.* anfängt, oder wo eine wirkliche Unterlage vorhanden ist, so will ich dort von ihr reden.

Lophium Fr. gehört hierher, hat zwar *thecae* wie *Hysterium*, aber die Gattung ist wohl anzunehmen, da die Substanz des Fruchtbehälters wie das Zerfallen der Schläuche zu Pulver sie auszeichnet.

Dothidea Fr. Nur *D. Ribis, Sambuci* und einige verwandte gehören hierher, deren Inneres mit dem Innern der Sphärien übereinkommt. Sie unterscheiden sich nur durch die Gestalt der Fruchtbehälter, welche in der Jugend der Länge nach einen Eindruck und immer eine runzliche Oberfläche haben. Einige sind schon oben von dieser Gattung gesondert worden, andere werden noch in der Folge getrennt werden.

Hysterium. Hierher gehören nur die Arten, welche das Innere einer *Sphaeria* haben, und sich nur durch die äufsere Form des Fruchtbehälters, den länglichen Eindruck nämlich, unterscheiden. Auch zerfallen die Schläuche nicht zuletzt in Pulver, welches bei vielen Sphärien der Fall ist. Man erkennt das wahre *Hysterium* durch die Lupe schon an dem weifslichen, dichten Kern; die übrigen von *Fries* zu *Hysterium* gebrachten Pilze *(H. Rubi et affinia)* müssen eine besondere Gattung unter dem Namen *Schizoderma* ausmachen. Sie gehören zu der Reihe mit 3 *Sp.* oder Fruchtbehälter mit Körnern ohne Schläuche.

Actidium.

Corynelia Fr. (*Calicium colpodes Achar.*) kenne ich nicht genau.

VI. 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 6 *Sp.*

Der Mangel an Unterlage oder nur eine Spnr derselben ist hier mit einem Fruchtbehälter verbunden, dessen Schläuche aufserhalb sich befinden und einen Ueberzug bilden.

Peziza. Mufs hier angeführt werden, da man nicht von allen Arten sagen kann, dafs die Unterlage zum Fruchtbehälter übergegangen sei. Einigen scheint die Unterlage zu mangeln, und andere haben eine deutliche Spur derselben, z. B. *P. aeruginosa, rosella.*

Patellaria Fries. Der Charakter nach Fries ist *Receptaculum marginatum, patellaeforme, epidermide contigua. Hymenium laeve, subpersistens, sed ex ascorum dissolutione pulverulentum. Asci connati absque paraphysibus.* Aber ich finde den Fruchtbehälter oft in der Jugend geschlossen, wie bei den Pezizen. Die Oberfläche ist zwar matt und gleichsam etwas körnig, aber nie habe ich gesehen, dafs die Schläuche zu Pulver zerfallen. Auch sind allerdings genug Paraphysen oder Schläuche ohne Fruchtkörner vorhanden. Durch zwei Kennzeichen unterscheidet sich *Patellaria* von *Peziza,* 1) dafs der Fruchtbehälter aus dem Innern des Holzes oder der Rinde hervorbricht, und 2) durch die schwarz gefärbte Materie, welche die Spitzen der Schläuche färbt und verbindet, wie in den Lichenen, wodurch die matte Oberfläche der Fruchtbehälter entsteht. Die Schläuche sondern sich in Wasser und werfen die Fruchtkörner aus, wie Nees beobachtet hat, doch zerreifsen die Schläuche dabei nicht.

Tympanis Fr. Der Charakter nach Fries ist *Receptaculum marginatum, cyathiforme, epidermide cornea. Hymenium laeve l. rugulosum, primo velo partiali tectum, demum una cum ascis tenuibus fixis fatiscens. Sporidia forma et numero varia secedentia.* Aber der hornartige Ueberzug ist ein schwer zu unterscheidendes Kennzeichen. Dafs die Schläuche verschwinden, ist hier nicht mehr der Fall als an allen Pezizenartigen Pilzen. Das *velum partiale* kenne ich nicht. Ich würde hierher *T. conspersa Fr.* rechnen, welche eine sehr deutliche Unterlage hat, worauf die Fruchtbehälter mit einander verbunden stehen. Die Haufen dringen unter der Oberhaut der Rinde hervor, worauf sie wachsen. Zu dieser so bestimmten Gattung gehören auch *Cenangium Ribis Fr. (Peziza Ribesia Pers.).*

Cenangium Fr. Eine sehr zusammengesetzte Gattung, welche Fries durch den anders gefärbten Ueberzug unterscheidet; das Innere ist nämlich weifs, das Aeufsere schwarz. Die erste Abtheilung *Scleroderris Fr.* macht unstreitig eine besondere Gattung aus, welche sich dadurch unterscheidet, dafs viele Fruchtbehälter beim ersten Hervorbrechen einen Körper ausmachen. Daher möchte ich *Coenangium* sagen, denn *Cenangium* von einem leeren Gefäfs hergenommen, ist unpassend. Die Schläuche sind von einem schwarzen Ueberzuge wie *Patellaria* umgeben, doch sind sie weislich nicht braun, wie dort, und entwickeln sich mit dem Alter.

Tryblidium kommt allerdings *Coenangium* nahe, mufs aber doch unterschieden werden. Oft theilt sich ein Fruchtbehälter in zwei; gewöhnlich entsteht aber nur der Anfang einer Theilung, welches sich durch eine erhabene Falte auf der Oberfläche zeigt. Der Ueberzug ist schwarz, das Innere weifs und die Schläuche entwickeln sich darin. Zuweilen schlägt sich der Ueberzug so herum dafs der Pilz im Innern schwarkörnig erscheint. Unter der Schlauchschicht ist oft ein gelblicher Kern, die eingewachsene Unterlage. Die Abtheilung *Clithris* von *Cenangium Fr.* gehört hierher.

Schizoxylon steht *Tryblidium* am nächsten, aber die Fruchtbehälter theilen sich nicht, sondern die Erhabenheiten des Fruchtbehälters stellen die Anfänge neuer Fruchtbehälter dar. Ist übrigens nur Abänderung von *Lecidea dryina* und zeigt wie nahe die Pilze den Flechten stehen.

Phacidium gehört hierher. Die von der Schlauchsubstanz ganz verschiedene, äufsere, verkohlte, aufspringende Umgebung macht das Hauptkennzeichen, sie mag in mehr oder weniger Lappen, oder gar nicht zerreifsen. *Hysterium quercinum* ist hierher zu rechnen, wenn man es zu keiner besonderen Gattung erheben will.

Stictis; Sphaerobolus Tode ist gewifs des sonderbaren Randes wegen zu trennen, der eine wahre äufsere Hülle bildet.

Excipula. Hierher würde ich nur die Pezizen und Hysterienartigen Pilze rechnen, in welchen man keine Schläuche entdeckt hat. Sie gehören zu der Reihe + 3 *Sp.*

Die Form 1 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 7 *Sp.* ist nicht vorhanden.

VII. 2 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 1 *Sp.*

Die Unterlage ist deutlich entwickelt, aber noch von unbestimmter Gestalt, gewöhnlichem Bau und äufserlich aufgestreuten Fruchtkörnern.

Trichostroma. Ein brasilianischer Pilz, die Unterlage flockig aber mit steifen ungegliederten Fäden wie *Dematium.* Die Fruchtkörner oben dick aufgestreut.

Coniophora De Cand. Die Unterlage schwammig von dichtem Geweben. Die Fruchtkörner oben fein aufgestreut.

Sarcopodium Ehrenb. Die Unterlage schwammig, die Fruchtkörner länglich mit Querwänden, festgewachsen.

Gymnosporangium. Die Unterlage gallertartig wie *Tremella,* Fruchtkörner wie *Puccinia* fest aufgewachsen.

Typhodium (Sphaeria typhina Pers.). Eine sonderbare Form. Die schwammigte Unterlage hat rundliche Erhöhungen, welche mit Fruchtkörnern bedeckt sind.

VIII. 2 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 2 *Sp.*

Die Fruchtkörner sind in der deutlichen unbestimmt gestalteten Unterlage innerlich zerstreut.

Aeufserlich verkohlt ist der Fruchtbehälter in *Leptostroma,* worin man keine Fruchtkörner erkennen kann; *Sclerotium* dessen Gestalt sich einer bestimmten nähert; doch ist *Sclerotium Semen* und *complanatum* ganz auszuschliefsen; *Rhytisma Fr.,* dem *Sclerotium* nahe verwandt, unterscheidet sich von *Polystigma* durch den Mangel an Schläuchen. *Coccopleum Ehrenb.* ebenfalls, doch sind die Fruchtkörner deutlicher, gehäufter als in *Sclerotium*; *Schizoderma Ehrenb.* nähert sich der bestimmten Gestalt und begreift die *Hysteria Fr.* ohne Schläuche; *Excipula Fr.* nähert sich der bestimmten Gestalt von *Peziza,* ist aber ohne Schläuche, daher gehören nicht alle *Excipulae Fr.* hierher; *Xyloglossum* eine sonderbare Gattung von einer Gestalt welche sich *Clavaria* nähert, auch ist ein wahrer Sprofstheil vorhanden.

Mit schwammiger Unterlage. *Hymenella Fr.* vielleicht der Anfang eines andern Pilzes. *Hypochnus Fr.* vielleicht unvollkommene Thelephoren. *Auricularia* hat eine fast bestimmte Gestalt. Der Name ist alt, und *Exidia Fr.* ist keine gut bestimmte Gattung.

Mit gallertartiger Unterlage. *Coccosphaerium, Allosphaerium,* wohin *Rhizoctonia muscorum Fr.* gehört. *Tremella, Encephalium,* (der Name ist schlecht, aber *Nematella Fr.* ist nicht besser), *Dacryomyces, Dacrydium, Agyrium,* letzteres kenne ich nicht.

Ich setze Schwammig dem Verkohlt entgegen. Die gallertartige Unterlage besteht gröfstentheils aus weichen, sehr ungleichen, rundlichen Zellen, mit wenigen Faserzellen.

Die Verbindung der unbestimmt gestalteten Unterlage mit einem besondern Fruchtbehälter, welcher die Fruchtkörner einschliefst (= 3 *Sp.*) ist mir nicht vorgekommen, auch nicht mit einem zusammengeseten Fruchtbehälter = 4 *Sp.*

IX. 2 *Str.* + 1 *F* + 1 *f* + 5 *Sp.*

Die deutliche Unterlage von unbestimmter Gestalt mit einem Fruchtbehälter, welcher Schläuche enthält.

Hierher gehört die Gattung *Sphaeria,* welche allein eine ganze Familie einnimmt. Es ist daher wohl zweckmäfsig, davon zu trennen was sich trennen läfst. Zuerst lassen sich die in andere Reihen gehörigen Gattungen wohl sondern, *Cordylia, Hypoxylon, Poronia.* Dann könnte man die mit einer haarigen Unterlage trennen, obgleich die Gattung in die haarigen Sphärien übergeht. *Sphaeria ovina* und *chionea* unterscheiden sich von den übrigen durch ihre schwammige nicht verkohlte Beschaffenheit und ihre grofsen Schläuche. Ich würde sie *Megathecium* nennen. Die Pezizenartigen Sphärien mit nicht verkohltem Fruchtbehälter welcher becherförmig einsinkt, dessen Schläuche bedeutend grofs sind, nämlich: *Sph. Peziza, episphaeria,* könnten vielleicht auch gesondert werden. Aber eine sehr gute Gattung würden die Sphärien machen, deren Fruchtbehälter oben abspringen *(circumscissa). Mesotome.* Auch möchte *Depazea* wo der Sprofstheil durch einen Flecken in der Pflanze, worauf die Sphärie wächst, dargestellt wird, wohl zu trennen seyn. Endlich können auch die Sphärien gesondert werden, welche in der Oeffnung Flocken, gleichsam als Ueberbleibsel des Sprofstheiles haben, z. B. *Sphaeria sanguinea.*

Polystigma. Diese Gattung von De Candolle mufs wieder hergestellt und von *Dothidea Fr.* getrennt werden. Sie unterscheidet sich leicht von *Sphaeria* dadurch, dafs die Fruchtbehälter keine besondere

Hülle *(peridium)* haben, sondern der Kern mit seinen Schläuchen von der Unterlage geradezu umgeben wird. Von den übrigen Dothideen ist sie durch den Bau gehörig unterschieden.

Solenarium Sprengel Glonium Fr. eine ausgezeichnete Gattung.

Die Verbindung der deutlichen, unbestimmt gestalteten Unterlage mit einem Fruchtbehälter, den die Schläuche überziehen, ist mir nicht bekannt.

X. 2 *Str.* + 2 *F* + 1 *f* + 1 *Sp.*

Die Unterlage erhebt sich zu einem rundlichen Kopf, und ist mit den nackten Fruchtkörnern überstreut, oder sie sind darauf angewachsen.

Ueberstreut: *Tubercularia, Fusarium, Dermosporium, Epicoccum.*

Aegerita. Die Fruchtkörner liegen einzeln und zerstreut auf der Unterlage, nicht haufenweise, wie an den vorigen.

Angewachsen: *Exosporium, Coryneum, Seiridium.*

Typhodium (Sphaeria typhina) eine zusammengesetzte Form. Die Unterlage ist schwammig, unbestimmt, erhebt sich auf der Oberfläche in kleinen rundlichen Erhabenheiten, welche mit Fruchtkörnern dicht bedeckt sind, wie *Dermosporium.* Ist also von *Sphaeria* sehr unterschieden.

Höhere Formen des Fruchtbehälters in dieser Verbindung mangeln.

XI. 2 *Str.* + 3 *F* + 1 *f* + 1 *Sp.*

Die längliche, keulenförmige oder Clavarien-Unterlage hat nackte, aufliegende Fruchtkörner. Hierher gehören *Isaria* und *Ceratium.*

+ 1 *f* + 2 *Sp.* Die Unterlage ist zart, gröfstentheils flockig, die Fruchtkörner scheinen ihr eingestreut zu seyn. *Solenia.*

+ 1 *f* + 3 *Sp.* Ein deutlicher Fruchtbehälter mit Körnern. *Stilbum.* Das wahre Kennzeichen dieser Gattung liegt in dem zuerst flüssigen Fruchtbehälter. Sie steht also zwischen dieser und der vorigen Unterordnung in der Mitte.

+ 2 *f* + 1 *Sp.* Die Unterlage besteht ganz aus gleichlaufenden Faserzellen mit wenigen rundlichen Zellen: *Periconia* und *Cephalotrichum.* Letztere hat an der Spitze der Unterlage einen Haarbüschel mit Fruchtkörnern bestreut, und ist gleichsam eine *Trichia* ohne Fruchthülle *(peridium)*, doch scheint sie nicht flüssig zu entstehen.

+ 2 *f* + 5 *Sp.* *Chordostylum Tode.* Ist in der folgenden Reihe noch einmal aufzuführen.

XII. $2\,Str. + 4\,F + 1\,f + 5\,Sp.$

Die ästige Unterlage bringt Sphärienartige Fruchtbehälter hervor an dem sonderbaren *Thamnomyces*.

$+ 2f + 5\,Sp.$ *Chordostylum Tode.* Hierher die Sphärien mit dünnen, fadenförmigen, glatten, ästigen, selten einfachen Stielen. Der Name von Tode ist der älteste von den vielen, welche man dieser Gattung gegeben hat, obwohl Tode unter dieselbe allerlei Gestalten brachte, welche nicht dahin gehören, und die Fruchtbehälter eigentlich nicht kannte.

$+ 3f + 7\,Sp$? *Rhizomorpha.* Die Körner, welche Herr Eschweiler in den Anschwellungen der Unterlage entdeckt hat, scheinen mir Keimkörner. Ich glaube, dafs Palissot de Beauvois recht beobachtete, als er einen Fruchtbehälter von *Poria (Boletus)* daran sah. Die Unterlage hat Lichenenbau, und ist an den Spitzen mit einem wahren flockigen Sprofstheile besetzt.

XIII. $+ 3\,Str.$

Wenn die Unterlage selbst zum Fruchtbehälter wird, kann von ihrer Gestalt F nicht mehr die Rede seyn, sondern F verwandelt sich in Sp. Der Bau f ist an allen diesen Pilzen, soweit wir sie kennen, immer derselbe. Es kommt also alles auf den Fruchtbehälter an, und hier mufs allerdings die erste Form, wo nackte Fruchtkörner auf der Unterlage sich befinden, wegfallen. Aber $2\,Sp.$ ist vorhanden, wo die Fruchtkörner nicht lose zusammen liegen, sondern im Innern des Fruchtbehälters zerstreut sind. Hier gehören: *Spermomorphia (Sclerotium Semen)*, *Pyrenium Tode* welches ich nicht genau kenne, *Acinula Fr.* und *Periola Fr.* ebenfalls nicht, *Acrospermum Tode*, vielleicht auch *Rhizoctonia crocorum*, welche mir aber ungeachtet aller meiner Bemühungen nicht zu Gesicht gekommen ist. *Pachyma Fr.* zweifelhaft.

Etwas mehr ausgebildet ist *Tuber*, welches runde Schläuche *(sporangiola)* in Adern enthält. Hieher gehört auch wol *Rhizopogon Fr.* und *Polygaster Fr.*

$+ 3\,Sp.$ Zusammengehäufte, lose Fruchtkörner sind in einem Behälter eingeschlossen. *Onygena, Lycoperdon, Bovista, Tulostoma, Diplostoma (Tulostoma squamosum), Geastrum, Catachyon,* eine neue Gattung von Ehrenberg in Nubien entdeckt, u. a. m.

Einen zusammengesetzten Fruchtbehälter haben die *Phalloidei*: *Clathrus*, *Phallus*, *Lysurus Fr. Ascroë Fr. etc.* Nähert sich 7 *Sp.*

Asterophora, eine höchst sonderbare Form; die Gestalt von *Agaricus*, dessen Hut in den Zustand eines *Lycoperdon* zurückgegangen ist.

+ 4 *Sp.* Kleinere Fruchtbehälter innerhalb der Grofsen. Die Fruchtkörner sind darin zerstreut.

Nidularia, *Arachnion Fr.* Ich fürchte sehr, meine *Endogone* ist eine unentwickelte *Nidularia*. *Carpobolus*, *Atractobolus*? *Thelebolus*??

+ 5 *Sp.* Innere Schläuche (*thecae*) sind in einem Fruchtbehälter ohne Unterlage nicht vorhanden.

+ 6 *Sp.* Der Fruchtbehälter ist ganz oder an der Spitze mit Schläuchen überzogen.

Stictis, wovon *Sphaerobolus Tod.* zu unterscheiden ist, *Peziza*, *Ascobolus*, *Bulgaria Fr.* ist wohl nur durch Auswerfen der Fruchtkörner von *Peziza* verschieden, (*Cyphelia* kenne ich nicht) *Rhyzinia Fr. etc.*

Geoglossum, *Ditiola Fr. Leotia*, *Vibrissea Fr. Spatularia*, *Mitrula*, *Helvella*, *Verpa Fr. Morchella*, *etc.*

Thelephora, *Stereum*, *Merisma*, *Clavaria*.

+ 7 *Sp.* Die Schläuche (*thecae*) sitzen auf besondern Theilen des Fruchtbehälters selbst, z. B. weichen Stacheln, Röhren, Blättern. In jeder dieser Gattung ist deutlich bezeichnet, wie bei der Beständigkeit des einen Theils jeder andere seine Reihe durchläuft. So hält der dichtgewebte Sprofstheil, der nun den Fruchtbehälter vorstellt, einige weiche Stacheln, worin die Schläuche sitzen; dann krümmt er sich an einer Seite um, und ist ein seitwärts angehefteter Pilz; dann verlängert sich der Stiel, und endlich rückt der Fruchtbehälter auf die Mitte des Stiels als ein Hut. So besteht jede Gattung aus mehreren solchen Sippschaften.

Hydnum, *Sistotrema*, *Daedalea*, *Fistularia*, *Polyporus*, *Boletus*, *etc.* *Xylophagus*, *Merulius*, *Schizophyllus*, *Coprinus*, *Agaricus*, *Amanita*. Mit dieser Gattung endigt sich die Reihe der Pilze sehr schroff, und hart abgesetzt gegen die übrige Natur.

Es ist schwer diese Reihen in natürliche Familien zu verwandeln. Die Unterschiede zwischen der nur angedeuteten und wirklich entwikkelten Unterlage sind schwer zu fassen, und wo die Unterlage sich in

den Fruchtbehälter verwandelt, verschwinden die Kennzeichen von ihr hergenommen ganz und gar. Da die Unterlage selbst sehr unbestimmt erscheint, so mufs dieses auch in Rücksicht auf ihre Gestalt und ihren innern Bau seyn. Wir müssen also die Reihen umkehren und den Fruchtbehälter zum ersten Gliede machen, dann werden wir wenigstens genau bestimmte Familien erhalten.

I. Die Fruchtkörner sind äufserlich auf eine Unterlage aufgestreut, oder äufserlich angewachsen, (1 *Sp.*) *Epiphyti.* Diese Familie enthält die Anfänge vieler andern Familien. Kleinere Haufen sind. 1) *Uredinei*, wo die Fruchtkörner auf lebendigen Pflanzen ohne bedeutende entwickelte Unterlage hervorkommen: *Caeoma*, *Cronartium*, *Spilocaea*, *Sporisorium*, *Septaria*, *Triphragmium*, *Puccinia*, *Phragmidium.* 2) *Stilbosporei*, wo die Fruchtkörner auf trockenen Pflanzentheilen ohne entwikkelte Unterlage hervorkommen: *Cryptosporium*, *Fusidium*, *Hypodermium*, *Melanconium*, *Didymosporium*, *Stilbospora*, *Phoma*, *Melanosorium.* 3) *Tubercularìacei*, wo die Fruchtkörner auf einer gewölbten Unterlage lose aufliegen: *Tubercularia*, *Fusarium*, *Aegerita*, *Dermosporium*, *Epicoccum.* 4) *Isariacei*, wo die Fruchtkörner auf einer Clavarien-Unterlage lose aufliegen: *Isaria*, *Ceratium.* 5) *Exosporei*, wo die Fruchtkörner auf einer verkohlten Unterlage aufgewachsen sind: *Sporidesmium*, *Exosporium*, *Coryneum*, *Seiridium.* 6) *Pucciniastri*, wo die Puccinienartigen Fruchtkörner auf einer gallertartigen Unterlage angewachsen sind: *Podisoma*, *Gymnosporangium.* Als einzelne Gattungen — Anfänge von Familien — stehen: *Myxosporium*, eine verstümmelte *Cytospora;* *Conisporium* zweifelhaft; *Coniophora* eine unentwickelte *Thelephora;* *Typhodium* eine unentwickelte *Sphaeria;* *Periconia* eine unvollendete *Stemonitis*, *Cephalotrichum* eine unvollendete *Trichia*, *Chromatium* ein ausgebildetes *Dematium.*

II. Die Fruchtkörner liegen innerhalb der nicht gallertartigen Unterlage, oder des Fruchtbehälters zerstreut. (2 *Sp.*) *Sclerotiaceae: Sphaeriomorphium*, *Coccopleum*, *Spermomorphium*, *Elpidophora*, *Sclerotium*, *Excipula*, *Schizoderma*, *Rhytisma*, *Leptostroma.* Alle sind unentwickelte Sphärien, Hysterien, Pezizen; *Solenia*, *Xyloglossum*, *Acrospermium* sind unentwickelte Clavarien, *Hypochnus* eine unentwickelte Thelephora, *Hymenella* bleibt zweifelhaft.

III. Die Fruchtkörner sind innerhalb der gallertartigen Unterlage zerstreut, *(2 Sp.) Tremelloidei: Coccosphaerium, Allosphaerium, Tremella, Encephalium, Dacryomyces, Dacrydium* sind unentwickelte Collemata, überhaupt Lichenosae; *Auricularia* eine unentwickelte Thelephora.

IV. Die Fruchtkörner sind innerhalb eines Fruchtbehälters gehäuft *(3 Sp.)*. Man kann hierher auch die Form 4 *Sp.* rechnen, wo der Fruchtbehälter Schläuche voll Fruchtkörner enthält. *Gastromycetes.* Auch diese Familie ist aus mehreren kleinern Haufen zusammengesetzt. 1) *Dimidiati.* Die Fruchtkörner liegen auf einer mehr oder weniger deutlichen Unterlage und sind nur mit der Fruchthülle *(peridium)* bedeckt: *Prosthemium, Actinothyrium, Leptothyrium.* 2) Mehrere einzeln stehende Gattungen müssen hier aufgeführt werden: *Taphria* ein innerlich ausgebildetes *Caeoma, Apiosporium* ein innerlich ausgebildetes *Sporidesmium, Pyrenochium* eine unausgebildete Sphärie, *Stegia* ebenfalls eine nicht völlig entwickelte Sphärie, *Chaetomium* ein innerlich ausgebildetes *Exosporium.* 3) Kleine zusammenstehende Fruchtbehälter, welche die Fruchtkörner in eine Gallerte gehüllt auswerfen: *Nemasporei.* Hierher *Cytospora, Sphaeronema.* 4) Kleine zusammenstehende Fruchtbehälter; die Fruchthülle eine zarte Membran. *Sporigastrei: Sporigastrum, Sphaeropleum, Botrydium, Polyangium, Amphisporium, Dichosporium.* 5) Der Fruchtbehälter ist zuerst flüssig. *Stilbacei.* Die Gattung *Stilbum* kann nach der Beschaffenheit der Unterlage in mehrere getheilt werden. 6) *Lycoperdei.* Die Fruchtbehälter stehen einzeln ohne Unterlage; die Fruchthülle ist aus Fasern und rundlichen Zellen deutlich zusammengewebt: *Onygena, Lycoperdon, Bovista, Scleroderma, Tulostoma, Diplostoma, Geastrum, Catachyon.* 7) *Cyathoidei.* Fruchtbehälter sind von andern umgeben. *Nidularia, Arachnion.* 8) *Carpobolei.* Der innere Fruchtbehälter wird von dem äufseren herausgeschnellt: *Carpobolus.* 9) *Tuberacei.* Die Fruchtkörner sitzen in Adern. *Tuber et affin:* 10) *Asterophora* steht allein.

V. Der Fruchtbehälter umschliefst Schläuche. *Sphaeriacei: Depazea, Pustularia, Megatheciium, Polystigma, Trichostroma, Sphaeria, Solenarium, Poronia, Hypoxylon, Cordylia, Chordostylum, Thamnomyces.*

VI. Der Fruchtbehälter ist mit Schläuchen bedeckt. *Sarcomycetes.* 1) Mit grofsen Schläuchen und mehr oder weniger becherför-

miger Gestalt. *Pezizoidei: Stictis, Sphaerobolus Tod. Peziza, Ascobolus, Bulgaria, Rhizinia.* 2) Mit grofsen Schläuchen und einem gesonderten Stiel. *Helvellacei: Ditiola, Leotia, Vibrissea, Spatularia, Mitrula, Helvella, Verpa, Morchella.* 3) Mit grofsen Schläuchen und keulenförmiger Gestalt: *Geoglossei, Geoglossum.* 4) Mit kleinen Schläuchen und flacher Gestalt. *Thelephorei: Thelephora, Stereum.* 5) Mit kleinen Schläuchen und mehr oder weniger erhöhter Gestalt. *Clavariacei: Merisma, Clavaria.*

VII. Die Fruchtkörner sind in einen Schleim gehüllt, befinden sich auf einem besondern Theile innerhalb des Fruchtbehälters, *Phalloïdei: Phallus et aff.*

VIII. Die Schläuche befinden sich an besondern Theilen und dieser wird von dem Fruchtbehälter getragen. *Agaricini: Hydnum etc. v. s.*

O. 2. *Lichenes.*

Der Sprofstheil ist gemmenartig oder blattartig.

Es ist durch die neueren Untersuchungen der Herren G. F. W. Meyer und Wallroth aufser allen Zweifel gesetzt worden, nicht nur, dafs die krustenförmige Gestalt des Sprofstheils eine unentwickelte blattförmige ist, sondern auch, dafs in einer und derselben Art, Verwandelung dieser Gestalten in einander Statt findet. Wir wollen daher von dieser Verschiedenheit für die Unterabtheilungen keinen Gebrauch machen, zumal da die Verknüpfungen dieser Formen schon oben dargestellt sind. Auch die übrigen Verschiedenheiten des Sprofstheils, welche auf Mangel und Ueberflufs beruhen, können hier nicht in Betracht kommen. Der sonderbare Bau der Gattung *Usnea,* da er nur an einigen Arten Statt findet, darf hier ebenfalls vernachläfsigt werden.

Aber es scheint mir zu weit gegangen, wenn man die Verschiedenheiten des Sprofstheils auch aus den Kennzeichen der Gattungen ausschliefsen will. Denn wie will man die Gattung *Verrucaria* von *Sphaeria,* oder *Peziza,* besonders *Patellaria Fries* von *Lecidea* unterscheiden, wenn man nicht den Sprofstheil zu Hülfe nimmt? Ja giebt es ein Kennzeichen, wodurch man die Lichenen überhaupt von den Pilzen unterscheiden kann, aufser der Beschaffenheit des Sprofstheils? Wir müssen bei

der Regel bleiben: was beständig ist, kann ein unterscheidendes Merkmal für die Gattungen geben.

Der Fruchtbehälter stimmt auf eine sehr auffallende Weise mit dem Fruchtbehälter der Pilze überein, und durchläuft dieselbe Reihe mit dem einzigen Unterschiede, dafs in der Folge der Lichenen einige Zwischenstufen fehlen. Wir haben nur drei Hauptstufen in der Reihe der Lichenen: 1) Fruchtbehälter, worin die Fruchtkörner enthalten sind, ohne in Schläuche *(thecae)* eingeschlossen zu seyn = 3 *Sp.* der Pilze; 2) Fruchtbehälter, welche die Schläuche einschliefsen, = 5 *Sp.* der Pilze, 3) Fruchtbehälter, welche von Schläuchen überzogen sind, = 6 *Sp.* der Pilze. Wir können also geradezu die drei Meyerischen Unterordnungen hier aufnehmen, da es auf die Reihe der Bildungen des Fruchtbehälters allein ankommt.

Zuvor jedoch über einige Gattungen, welche an sich, oder in Rücksicht auf ihre Stellung, zweifelhaft sind. Die Gattung *Lepraria* ist den Pilzen gleich zu setzen, welche keine Fruchtbehälter, sondern nur Keimkörner tragen. Die Uebereinstimmung geht so weit, dafs ich *Lepraria latebrarum* und *chlorina* zu *Sporotrichum* gebracht habe; der Bau ist völlig derselbe und allerdings von dem Baue der *L. flava* verschieden; dort gegliederte Fäden, hier unregelmäfsig gehäufte und gebildete Körner. Nach Floerke ist *L. latebrarnm* eine ausgebleichte *L. chlorina.*

Von den Gattungen *Spiloma, Isidium* und *Variolaria* haben uns die Herren Meyer und Wallroth befreiet. Es ist ohne allen Zweifel, und zuweilen sehr deutlich wahrzunehmen, dafs die Variolarien veränderte Porinen oder Parmelien sind. Aber die Art der Veränderung scheint mir nicht die von jenen Untersuchern angegebene. Die wahren Keimkörner der Lichenen, welche an bestimmten Orten hervorkommen, z. B. an der *Sticta verrucaria Ach. St. aurata A. Ramalina farinacea Ach.* finde ich immer unter dem Mikroskop zwar klein, aber doch bei weitem gröfser, deutlicher gerundet und gleichförmiger, als die Körner, welche auf dem Variolarien hervorkommen. Diese gleichen völlig den Leprarien. Ich kann daher nicht umhin, diese Körnermasse für parasitische Leprarien zu halten, welche die Flechten eben so zerstören, wie der Brand die gröfseren Gewächse, oder will man noch eine nähere Vergleichung haben, ein *Sepedonium* die gröfsern Pilze. So läfst sich

die sonderbare, und doch äufserst häufig vorkommende Veränderung der Lichenen erklären, da sonst die Monstrositäten im organischen Reiche viel seltener gefunden werden. Denn hier ist nicht blofs Fehlgeburt, sondern wirkliche Umgestaltung oder Monstrosität. Auch hat die Veränderung der Parmelien, das Aufschwellen, die Entfärbung eine grofse Aehnlichkeit mit den Veränderungen der Blätter durch Rost, z. B. der Birnblätter durch *Roestelia cancellata.* Ich möchte drei Arten von parasitischen Leprarien unterscheiden: erstlich die graue bittere Art mit etwas gröfseren Körnern, zweitens die weifse, unschmackhafte Art mit kleinern Körnern, und drittens die gelbliche ebenfalls nicht bittere Art. Die letztere bildet *Isidium phymatodes Ach.*

Spiloma verrucosum Floerke ist ein parasitischer Pilz, *Torula* nahe verwandt oder eine Art dieser Gattung. Diese Pilze kommen zuweilen parasitisch vor, wie *Tetracolium Tuberculariae* zeigt.

Für *Leparia rubens* habe ich ein Gewächs gehalten, welches um Berlin an Tannenbäumen, an Bretterzäunen, wo sie feucht sind, häufig wächst. Frisch ist es orangefarben, trocken gelblich grün. Herr Wallroth hat davon umständlich geredet. Er bringt dahin *Torula crocea Mart.* welche ich also unrichtig unter *Oidium* in meiner Fortsetzung der *Spec. pl.* von Willdenow aufgeführt habe, weil ich sie nicht gesehen. Ich weifs nicht, ob ich dasselbe Gewächs vor mir habe, welches Herr Wallroth commentirt hat, aber meines ist gewifs nicht die Ausgeburt einer Flechte; dafür bürgt der Bau, wie er unter dem Mikroskop sich zeigt. Es besteht nämlich aus vielen grofsen und kleinen in Wasser aufschwellenden und dann gallertartig erscheinenden Bläschen, welche sehr wenig Aehnlichkeit mit den Keimkörnern der Lichenen, und eben so wenig mit den Leprarien haben. Es steht vielmehr den Tremellenartigen Pilzen nahe, *Coccosphaerium* oder *Allosphaerium*, und vermuthlich gehört dahin der Pilz, welcher den Schnee in Grönland roth färbt. Auf meinen Excursionen um Berlin habe ich es den Zuhörern als *Coccophysium nov. Gen.* angegeben.

Subordo 1. *Coniocarpi.*

Der Fruchtbehälter schliefst — wenigstens im Anfange — die Fruchtkörner ohne Schläuche *(thecae)* ein.

Calycium. Die Gattung *Coniocybe* ist nicht gehörig gesondert. Bei allen Calycien sind die Fruchtbehälter mit Keimkörnern, wenigstens in der Jugend überstreut, und die wahren Fruchtkörner finden sich innerhalb einer dichten zelligen Masse. *Cal. tympanellum* und *albo-atrum Fl.* gehören keinesweges hieher; sie haben Schläuche und *C. tympanellum* deutlich doppelte Fruchtkörner, *C. albo-atrum* weniger deutlich. Man könnte sie, wegen des nach unten verlängerten Fruchtbehälters, und der grofsen leicht sich sondernden Körner zu einer besondern Gattung erheben. *Cal. tigillare* scheint auch dahin zu gehören. Ist *Cal. roscidum* ein abgeänderter Zustand der *Lecidea dryina,* so gehört es ebenfalls dahin.

Subordo 2. *Myelocarpi.*

Die Schläuche sind von dem Fruchtbehälter eingeschlossen.

Chiodecton, Antrocarpium, Porophora, Mycoporium, Ocellularia, Stigmatidium, Verrucaria, Trypethelium, Pyrenastrum, Stigmatidium, Endocarpon. Oft fehlt die Fruchthülle *(peridium)*, dann machen die Schläuche einen Kern.

Subordo 3. *Hymenocarpi.*

Eine Schicht von Schläuchen überzieht die Fruchtbehälter.

Es ist wohl zu merken, dafs diese Gestaltung sich weit mehr der vorigen nähert, als in den Pilzen. Die Spitzen der Schläuche sind durch eine oft ziemlich dicke, gefärbte Materie bedeckt, welche sie von oben einschliefst. Die Schläuche enthalten oft noch andere Schläuche *(asci)*, in welchen sich die Körner als ein schwarzes Pulver befinden, und werden dadurch den Schläuchen der vorigen Unterordnung sehr ähnlich. In *Opegrapha* neigen sich die Ränder so zusammen, dafs sie fast Hysterien sind. Man mufs also die Gränze in der Ordnung der Lichenen etwas anders ziehen, als in der Ordnung der Pilze.

Conioloma. Die Gattung gehört hieher, denn es sind wahre Schläuche *(thecae)* vorhanden. Sie fallen an der Oberfläche endlich zusammen, und werden gleichsam pulverig, auch fallen die Körner in ihnen zu einer pulverigen Masse zusammen.

Opegrapha (dieser älteste, von Humboldt gegebene Name, verdient den Vorzug vor *Graphis*), *Antherisca, Leucogramma, Platygramma, Glyphis.*

Graphidium. In einer Abhandlung in Schrader's N. Journ. d. Botan. 2. Bd. S. 1. habe ich die sehr abweichenden *asci* von *Lecidea atrovirens* vorgestellt, aber nur nach einem Querschnitte, in einem Längeschnitte sind sie länglich. Deutliche *thecae* habe ich nicht gesehen, und das Gewächs gehört also in Rücksicht auf den innern Bau in die Nähe von *Porophora.* Da die Art, wie der Fruchtbehälter auf den Sprofstheil aufgesetzt ist, zu einem äufsern Kennzeichen dienen kann, so rathe ich, diese Flechte unter dem aufgestellten Namen, als Gattung zu sondern. Denn jeder Fruchtbehälter macht mit dem anhängenden Stücke des Sprofstheils ein Individuum aus.

Urceolaria. In der erwähnten Abhandlung habe ich die aufserordentlich grofsen Fruchtkörner dargestellt, in der Meinung, dafs sie Schläuche *(thecae)* seyn möchten. Aber die äufseren Schläuche sind allerdings vorhanden. Auch in *U. cinerea (ocellata)* sind die Fruchtkörner sehr grofs, obwohl nicht so grofs als in *U. contorta.* Diese Flechten könnten gar wohl in eine Gattung zusammengestellt werden, deren Sprofstheil in Felder *(areas)* zerreifst, so dafs jedes Feld einen oder mehrere versenkte Fruchtbehälter enthält. Jedes Feld macht mit seinen Fruchtbehältern ein Individuum. *Urceolaria scruposa* und verwandte sind wahre *Lecanorae.*

Lecidea, Patellaria. Hätte Meyer die Gattung *Lecidea* mit dem Namen *Patellaria* belegt, und umgekehrt, so könnte man *Patellaria Fries* geradezu vereinigen. Denn dieses Gewächs mufs doch, als wahres Verbindungsglied, sowohl unter den Flechten als unter den Pilzen aufgeführt werden. Der Unterschied zwischen *Lecidea* und *Patellaria,* wie ihn Meyer bestimmt, hat sehr undeutliche Gränzen.

Lecidea, Psoroma. Diese letztere Gattung wird genugsam durch den Sprofstheil ausgezeichnet. Er entwickelt sich getrennt von dem Fruchtbehälter, und beide Theile sind von einander fast unabhängig. Er enthält statt der faserigen Masse eine pulverige, und diese besteht unter dem Mikroskop aus sehr ungleichen, grofsen und kleinen, losen Zellen. Hieher gehören *Psoroma decipiens, testaceum, luridum* und verwandte Arten.

Gyrophora. Wenn auch in den Fruchtbehältern kein Gattungskennzeichen liegt, so findet man es doch in dem Sprofstheile, der nur

aus dem Ueberzuge besteht, und keinen faserigen oder pulverigen Mittheil enthält.

Lecanora. Es ist allerdings richtig, daſs der blattartige Sproſstheil unentwickelt einen gemmenartigen oder krustenförmigen darstellt. Aber man erkennt einen solchen Sproſstheil sehr bald, mag er nun eine wirkliche Fruchtbildung wie die Variolarien zeigen, oder ein Mangel an Entwickelung seyn, wie wir die *Parmelia parietina* in den jugendlichen Zuständen finden. Die Gattung *Lecanora* kann also recht wohl getrennt werden, wenn man die veränderlichen Gestaltungen des krustenförmigen Sproſstheils ausschlieſst. Den Uebergang der *Lecidea aurantiaca* in *Parmelia parietina* habe ich oft beobachtet. Es wird der Rand der Fruchtbehälter heller, schwillt an, und wächst zur blattartigen Gestalt aus. So deutlich dieses auch ist, so bleiben mir doch noch Zweifel, ob nicht ein parasitischer Zustand hier täuschen könne. *Parmelia parietina* dringt aus dem Innern der *Borrera tenella* hervor, und verwächst mit ihr so sehr, daſs man gewiſs behaupten würde, eine Art verwandele sich in die andre, wenn nicht übrigens beide Gestalten zu sehr von einander verschieden wären.

Parmelia. Diese Gattung hat drei Abtheilungen: *Placodium,* wo das Innere des Sproſstheils wie an *Psoroma* beschaffen ist, nur entwickelt sich der Fruchtbehälter auf die gewöhnliche Weise; *Parmelia,* von gewöhnlicher Bildung des Sproſstheils, ohne Wurzelzasern, doch angewachsen; und *Borrera,* mit Wurzelzasern. Die meisten Arten gehören zu der letzten Abtheilung. Meyer und Wallroth haben sehr treffend das Verwandlungsspiel der *Borrera tenella* gezeigt. Hier ist alles deutlich ohne Verdacht einer parasitischen Veränderung. Wenn man auch diese Abtheilungen nicht trennen will, so kann man doch die folgenden unbedenklich zu eigenen Gattungen machen. *Euernia.* Der Sproſstheil nur in der Mitte angewachsen, sonst niederliegend, mit einer obern und untern Seite ohne Wurzelzasern. Hieher *Lichen furfuraceus, glaucus* u. s. w. *Cetraria.* Der Sproſstheil ist an der Basis in die Erde eingewachsen, oder in der Mitte angewachsen ohne Wurzelzasern, mit zwei gleichen Seiten. Hieher *C. islandica, nivalis, cucullata, vulpina, iuniperina* u. s. w. auch *Cornicularia aculeata. Ramalina:* eine schildförmige Wurzel. Hieher *R. fraxinea, populina, polymorpha, Prunastri* u. s. w.

Cornicularia. Eine schildförmige Wurzel, und runde Sprofstheilzweige. Hieher *C. tristis* und *Roccella.* Ich besitze *Parmelia stygia* mit ausgewachsener *C. lanata,* vom Harz, und habe diese immer für parasitisch gehalten, doch stelle ich die Sache anheim.

Sticta. Die beiden Arten *St. pulmonaria* und *verrucaria* haben durchaus keine wahren Cyphellen, auch ist der Bau des Fruchtbehälters anders, als an *St. aurata,* wo er, wie gewöhnlich, sich verhält. Beide würde ich daher unter dem Namen *Lobaria* trennen.

Peltidea. Die Gattungen *Nephroma* und *Solorina* sind nicht zu trennen.

Cenomyce, oder, wie Meyer richtig sagt, besser *Cladonia.*

Sphaerophorus. In der oben angeführten Abhandlung in Schraders Journal habe ich gezeigt, dafs dieses Gewächs, wie die verwandten Gattungen, wahre Schläuche *(thecae)* mit aneinandergereihten Fruchtkörner hat. Aber man mufs die Fruchtbehälter in der frühen Jugend untersuchen, ehe die Körner schwarz gefärbt sind, um dieses zu sehen. Zur Zeit der Reife schwinden die Schläuche, und die Fruchtkörner bilden eine pulverige Masse.

Alectoria. Hieher rechne ich nur *Usnea barbata,* mit der gegliederten Rinde des Sprofstheils. *Usnea iubata* gehört zu *Cornicularia.*

Usnea. Das Innere des Sprofstheils ist durch sein Holz, nämlich durch ein Bündel von gleichlaufenden Fasergefäfsen oder Faserzellen sehr ausgezeichnet. Das Fasergewebe der übrigen Lichenen ist ein verwickeltes Gewebe, wie der flockige Sprofstheil der Pilze es meistens ist.

Collema. Der ganz eigenthümliche Bau des Sprofstheils zeichnet diese Gattung sehr aus. Der rindige Theil ist aufgeschwollen, vermehrt und hat dadurch den faserigen Theil auseinander gedrängt. Daher finden sich einzelne, einfache oder wenig ästige Fasern mit vielen Querwänden innerhalb der gallertartigen zelligen Masse zerstreut. Oft sind diese Fasern kurz und fast spindelförmig. So nähert sich der Bau gar sehr einem Nostoch, und diese Flechten machen das Verbindungsglied zwischen beiden Ordnungen. Dieser Bau ist selten gehörig und in seiner Verbindung dargestellt worden.

Coenogonium. Ist dem Fruchtbehälter nach ein wahrer Lichen, und zwar aus dieser letzten Unterabtheilung; dem Sprofstheile nach, ein höchst sonderbares Gewächs.

O. 3. *Algae.*

Der Sprofstheil ist entweder inwendig, seinem Baue nach, gleichförmig, oder er besteht aus gewundenen gallertartigen Faserzellen, mit einem Ueberzuge von rundlichen Zellen. In seltenen Fällen besteht er ganz aus gewundenen Fasern.

Alle, welche sich mit diesen Pflanzen beschäftigten, mufsten auf den Sprofstheil zuerst und vorzüglich Rücksicht nehmen, weil die Fruchtbehälter selten gefunden werden, und im trockenen Zustande schwer zu untersuchen sind. Es ist daher auch nur auf den Stand der Fruchtbehälter Rücksicht genommen worden. Sehr selten hat man von dem Innern der Fruchtbehälter Gebrauch gemacht, um dadurch die Gattungen zu bezeichnen.

Die Abtheilungen, welche Herr Agardh angiebt, sind so vortrefflich, dafs wir sie mit einigen wenigen Abänderungen geradezu aufnehmen dürfen.

Subordo 1. *Diatomeae.*

Der Sprofstheil theilt sich in verschiedene Stücke und vermehrt sich dadurch. Diese Gewächse stehen am Rande des Gewächsreiches, und bilden das Lückenglied zwischen den Pflanzen und Zoophyten. *Oscillatoria* gehört hieher; sie zerfällt nach den Beobachtungen des Herrn Dr. Leo in Bacillarien. Die Gattungen sind von Agardh gut bestimmt.

Subordo 2. *Nostochinae.*

Der Sprofstheil besteht äufserlich aus einer gallertartigen Hülle, innerlich aus einem gegliederten einfachen oder ästigen Faden.

Protococcus nivalis, der rothe Schnee, ist ohne Zweifel ein Pilz, und gehört, wie ich schon oben erwähnt habe, in die Nähe von *Coccophysium*, oder ist eine Art dieser Gattung. *Prot. viridis Agardh* ist ein zweifelhaftes Gewächs.

Palmella sind höchst wahrscheinlich die Anfänge anderer Algen; ohne Zweifel ist dieses von *Byssus botryoides*, aus welchem *Lyngbya muralis* gar oft deutlich hervorgeht. Einige mögen auch zu den Tremellenartigen Pilzen gehören. *Echinella* und *Gloionema* sind zu der vorigen Ordnung zu bringen.

Alcyonidium ist ein zweifelhafter Körper, vielleicht zoophytisch.

Nostoc oder besser *Nostochium.* Der ganze Sprofstheil ist in eine blattartige Form ausgedehnt. Die Faserzellen sind von einander durch die gallertartige Masse gesondert, und das Ganze gleicht einem *Collema* so sehr, dafs nur die Frucht das letztere unterscheidet. Etwas verschieden ist der Bau der kugelförmigen und unförmigen Nostochs. Die Faserzellen sind ebenfalls von einander gedrängt durch die gallertartige Masse, ästig, gegliedert, und schwellen hier und da in grofse helle Körner auf. Diese Faserzellen sammlen sich auf der Oberfläche von *N. verrucosum,* dessen Warzen dadurch entstehen, und vermuthlich schlüpfen aus diesen kleinen Erhabenheiten jene grofsen, hellen Körner hervor um das Gewächs fortzupflanzen.

Die Gallerte vermindert sich immer mehr und mehr; in *Rivularia* und *Chaetospora* ist sie schon in einer weit geringern Menge, als in *Nostochium,* und endlich überzieht sie nur als ein zarter Schleim die Fäden, welche dadurch schlüpfrig anzufassen sind. *Batrachospermum, Draparnaldia, Thorea,* müssen hierher gebracht werden. Die Glieder sind nicht mit einer äufsern Haut überzogen, wie an den wahren Conferven. Hier erscheinen zuerst wahre Fruchtbehälter, da die Körner der übrigen wohl nur Keimkörner sind.

Subordo 3. *Conjugatae.*

Die merkwürdigen Algen, deren Fäden sich mit einander verknüpfen, müssen in einer besondern Ordnung zusammengestellt werden. Sie haben alle Querwände; in einigen ballt sich die grüne Materie zusammen, und geht in einen andern angeknüpften Faden über; in andern ballt sie sich zusammen ohne Uebergang, und in noch andere ist eine Verknüpfung ohne Zusammenballung. Es läfst sich erwarten, dafs auch der vierte Fall vorhanden seyn werde, eine Zusammenballung ohne Verknüpfung. Der erste Fall bestimmt eine Gattung, welche Agardh nicht getrennt hat, und welche ich *Spirogyra* nenne, wegen der im Anfange spiralförmig gewundenen Fäden. Der andere findet sich in den übrigen Arten von *Zygnema Agardh* (besser *Zeugnema*). Der dritte ist *Mougeotia Agardh.* Der vierte *Sphaeroplea Ag.* (besser *Sphaerogona*), welche den Uebergang zur folgenden Unter-Ordnung macht, daher man das Kenn-

zeichen dieser Abtheilung so fassen mufs: der Sprofstheil verknüpft sich mit dem Sprofstheile eines andern Individuums, oder der gefärbte Stoff im Innern ballt sich zusammen.

Subordo 4. *Confervaceae.*

Der Sprofstheil erscheint mit Querwänden durchschnitten, und hat innerlich keine gallertartige Faserzellen. Es fehlen die Kennzeichen der vorigen Ordnung.

Was die Querwände in den Fäden der Conferven bedeuten, hat Roth sehr gut gezeigt, und die Algologen haben in der Angabe der Kennzeichen nicht genug darauf Rücksicht genommen.

Die Gattungen *Byssocladium*, *Syncollesia*, *Myginema*, *Chroolepus*, *Trentepohlia*, *Scytonema*, *Stigonema*, *Protonema*, *Hygrocrocis* und *Leptomitus* erfordern noch eine genaue Durchsicht. Viele sind Pilze; die Gattung *Byssocladium* gewifs; *Syncollesia melaena* fällt als *Monilia antennata* beim flüchtigen Blicke auf; die ganze Gattung *Hygrocrocis* scheint mir nichts als der Sprofstheil von *Penicillium glaucum*. Von *Protonema* hat Agardh selbst bemerkt, dafs darunter viele Samenblätter von Moosen vorkommen möchten. *Trentepohlia* ist eine wahre Alge. Die *Batrachospermeae* sind, wie oben erwähnt worden, auszuschliefsen, auch wohl *Nodularia* mit ihnen; *Mesogloia* gehört, wenigstens die gröfsern, zu den *Fucoideis*.

Die unbeweglichen, nicht in Bacillarien sich sondernden Oscillatorien machen eine Familie aus. *Baugia* verdient eine genaue Revision. Einige Arten gehören zu den Ulvaceen, andere vielleicht zu den Conjugaten oder Diatomeen.

Die netzförmigen Conferven machen eine besondere Familie, bestehend aus zwei Gattungen.

Die Gattung *Conferva* steht allein in ihrer Familie. Man könnte sie wohl in zwei andere trennen; eine wo der gefärbte Stoff sich gegen die scheinbaren Zwischenwände legt und diese färbt, und eine andere, wo er sich in die Mitte zieht, und die Zwischenwände hell und durchsichtig läfst. Doch enthält die letzte Gattung bei weitem die meisten Arten.

Die Familien *Ceramiaceae* und *Ectocarpeae* bilden eigentlich nur eine Familie, in welcher die Fruchtbehälter aufserhalb am Sprofstheile sich befinden. Die Körner liegen in denselben zerstreut, also ist die Form = 2 *Sp.* wenn wir die Bezeichnung der Pilze beibehalten. So ist es auch an *Batrachospermum.* Die doppelte Frucht von *Hutchinsia* besteht in Fruchtbehältern und Haufen von Keimkörnern. Die *Ectocarpeae* machen eine Unterabtheilung dieser Familie. Uebrigens folgt Agardh in der Zusammenstellung meistens Lyngbye, dessen Analysen in dieser Familie vorzüglich sind.

Subordo 5. *Ulvaceae.*

Der Sprofstheil hat keine Spur von Querwänden; enthält auch keine gallertartige Faserzellen.

Codium gehört ohne Zweifel zu den *Fucoideae.* Der Mangel der Frucht kann keinen Unterschied machen. Auch *Caulerpa* scheint eine *Fucoidea.* *Solenia* ist eine wahre *Ulvacea,* aber der Name kann nicht bleiben, da schon längst eine *Solenia* unter den Pilzen vorhanden ist. Also *Enteromorpha.*

Zonaria gehört hierher. Die Fruchtbehälter sind äufserlich zu nennen und enthalten zusammengehäufte Körner, also eine Bildung = 3 *Sp.* Herrn Agardh scheint meine Analyse in den *Horae Berolinenses* nicht bekannnt geworden zu seyn.

Subordo 6. *Spongiaceae.*

Gewundene Fasern ohne Ueberzug bilden die Sprofstheile. Aeufserliche Fruchtbehälter mit zusammengehäuften Fruchtkörnern.

Spongia lacustris, wie ich schon oben erinnert habe, ist eine wahre Alge, und sehr von den Zoophyten entfernt. Ob die übrigen *Spongiae* sich eben so verhalten, weifs ich nicht; die Gestalt der Fruchtbehälter ist = 3 *Sp.* Dieses Gewächs besteht aus den Faserzellen der *Fucoideae* ohne ihren Ueberzug.

Subordo 7. *Fucoideae.*

Der Sprofstheil ist mit einer Gallerte angefüllt, welche aus Faserzellen besteht.

Da in der Familie der *Fucoideae* so viele Gestaltungen des Fruchtbehälters von Agardh angenommen werden, so sieht man nicht ein, warum die etwas weniger entwickelten Gestaltungen des Fruchtbehälters die *Florideae* trennen sollen. Ueberhaupt mufs man bedenken, dafs der innere Bau der Fruchtbehälter in allen diesen Gewächsen noch wenig untersucht ist. Agardh hat nach der Stellung und der äufsern Gestalt der Fruchtbehälter sehr geschickt die Gattungen bestimmt, aber die Angaben vom innern Bau scheint er meistens von Turner genommen zu haben, und dieser wandte viel zu geringe Vergröfserungen an. Auch Lyngby untersuchte mit viel zu wenig vergröfsernden Werkzeugen. Ich habe nur wenige Tangarten genau untersuchen können, denn in allen den Sammlungen, welche mir offen standen, fehlten die Fruchtbehälter nur zu oft. Indessen will ich einige Bemerkungen beifügen.

Dafs die doppelten Früchte Keimkörner und Fruchtkörner seyn mögen, wird man bald vermuthen. An *Delesseria* habe ich auch die Uebereinstimmung mit den Keimkörnern der Lichenen sehr auffallend gefunden. Nur ist es merkwürdig, dafs die Keimkörner auch oft in besondere Behälter eingeschlossen erscheinen, wenn sie mit den Fruchtbehältern an einer Pflanze sich befinden. Dann sind sie in den weifsen Früchten den *Rhodomela pinastroides* in längliche Schläuche eingeschlossen, da hingegen in den kugelförmigen Fruchtbehältern längliche, gestielte Behälter *(sporangiola)* liegen, mit einer körnigen Masse erfüllt. Die *Sphaerococci* haben gröfstentheils grofse, gestielte Körner in ihren Fruchtbehältern, vermuthlich *sporangiola*, ungeachtet ich kleinere Körner nicht darin gefunden habe. In *Sphaerococcus rubens, Griffitsiae, striatus* sieht man sehr schöne bündelförmig zusammengestellte Schläuche *(thecae)* wie in den Pezizen. Sie gehen vom Mittelpunkte nach den Umfange. In *Polyides lumbricalis* sind die Behälter wie sie sich in den wahren *Sphaerococcis* finden, mit den Schläuchen der übrigen vereint. *Furcellaria* hat Behälter mit einer körnigen Masse erfüllt. In *Fucus* gehen die Schläuche vom Umfange gegen die Mitte; sie sind in *Fucus vesiculosus* so, wie ich sie in Schraders Journal vorgestellt habe; in *F. canaliculatus* fand ich aber diese Form mit wahren Schläuchen zusammen, so dafs jene wohl nur eine jugendliche Form scheint. In *Cistoseira* fand ich sehr deut-

liche Schläuche, alle gefüllt, also keine *fila intermixta.* An einem andern Orte werde ich diese Untersuchungen mittheilen.

Subordo 8. *Characeae.*

Eine wahre und regelmäſsige Verästelung.

Diese Gewächse haben den innern Bau der Algen; dem äuſseren Baue nach schliefsen sie sich an die mehr entwickelten Gestalten des Pflanzenreichs an, und beschliefsen die Reihen der Kryptophyten.

Ueber die
Antilopen des nördlichen Africa,
besonders in Beziehung auf die Kenntnifs, welche die Alten davon gehabt haben.

Von
Hrn. LICHTENSTEIN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 11. März 1824.]

Unter den Schätzen, welche die Königlichen Sammlungen dem Eifer der Doctoren Ehrenberg und Hemprich zu verdanken haben, befindet sich auch eine bedeutende Zahl von Antilopen, welche ein Streifzug, den diese unermüdlichen Sammler im Sommer des Jahrs 1822 von Dongola aus nach Sennaar unternahmen, ihnen verschaffte.

Wiederkäuende Thiere aus bisher unzugänglichen, wenig bekannten Ländern haben immer ein eignes Interesse, insofern sie als die gröfseren thierischen Formen, zu den am mehrsten in die Augen fallenden Wahrzeichen solcher Länder gehören, und über deren Fruchtbarkeit und sonstige natürliche Beschaffenheit mancherlei Schlüsse zulassen, die in Zusammenstellung mit andern Bestandtheilen der dortigen Fauna ein ungefähres Bild von dem natürlichen Gesamtcharacter des Landes geben. Hier mufste dieses Interesse um so gröfser sein, als eben jene Gegenden den Griechen und Römern zugänglich gewesen sind, und die auffallenderen Thierformen, welche dieselben bewohnen, in den auf uns gekommenen Werken ihrer Schriftsteller sich häufig genannt und beschrieben finden und als diese Angaben in der neueren Zeit so oft zu gelehrten Untersuchungen Veranlassung gegeben haben.

Wenn solche Untersuchungen im Ganzen der Wissenschaft wenig Gewinn gebracht haben, so liegt die Ursache davon theils in der Mangelhaftigkeit und Kürze der älteren Angaben selbst, theils in der be-

schränkten Kenntnifs, welche die gelehrten Commentatoren von den Dingen hatten, über welche es sich handelt, und wenn vollends, wie nicht zu läugnen, selbst durch die besten unter diesen, viel irrthümliche Vorstellungen verbreitet worden sind, so kann man dies nur dem allerdings verzeihlichen Wahn, in welchem die naturhistorischen Schriftsteller der letztverflossenen Jahrhunderte befangen gewesen sind, zuschreiben, als seien ihre Kenntnisse von den natürlichen Erzeugnissen der Erde zur Genüge erschöpfend und als müsse der Aufschlufs zu jeder naturhistorischen Frage des Alterthums aus dem Vorrath der bis dahin zur Kunde gekommenen Thatsachen zu entnehmen sein; der nicht minder erheblichen Schwierigkeiten gar nicht zu gedenken, welche sich aus dem bei den Alten so häufig zu findenden willkührlichen oder doch wechselnden Gebrauch gangbarer Namen, aus der etwanigen Corruption des Textes, aus dem Verlust der eigentlichen Quellen und Haupt-Beweisstellen u. s. w. ergeben.

In keiner andern Abtheilung der Thierkunde aber hat man sich ängstlicher bemüht, die Namen der Alten auf Bekanntes und Gegebnes zu deuten als bei den Wiederkäuern, und in keiner Gattung ist dies schlechter gelungen als in der der Antilopen, die, ihnen hauptsächlich nur aus dem nördlichen Africa bekannt, je nachdem ihre Gestalt es zu fordern schien, bald dem Rinder-, bald dem Ziegengeschlecht zugesellt, bald unter ganz eigenthümlichen Namen bezeichnet wurden. Jede Zeit hat es sich erlaubt, diesen Namen bestimmte Deutung zu geben; die mehrsten derselben haben aber ihre Bestimmung häufig gewechselt, und man findet sie seit Linné's Zeit, von allmählich zunehmender und berichtigender Sachkenntnifs der Wahrheit immer näher geführt, in den systematischen Namenverzeichnissen bald als specifische Namen bald als Synonyme von einer Art auf die andre übertragen. Viele, die noch jetzt nicht genügend erklärt werden können, stehen längst in mifsbräuchlicher Anwendung in den Handbüchern, selbst in den Schriften zum Unterricht für die Schuljugend da, und jedem Anfänger in der Zoologie, wenn sich ihm die Schriften der Alten für dieses Studium auch nie geöffnet haben, sind die Namen *Bubalus, Dama, Oryx, Strepsiceros, Dorcas, Cervicapra, Tragelaphus* u. s. w. wohlbekannte Klänge, mit welchen sich ihm freilich selten andre als sehr dunkle Vorstellungen

verbinden. Es ist der Zweck gegenwärtiger Abhandlung, den mehrsten dieser Namen eine sichere Erklärung dadurch zu geben, dafs sie zeige, wie die Angaben der Alten so vollkommen auf die Thiere zutreffen, die, nachdem sie seit den Kampfspielen der Römer nicht mehr in Europa gesehn worden, zuerst durch jene eifrigen Sammler wieder entdeckt worden sind.

Der Erste, der es versucht hat, die gröfstentheils willkührlichen Deutungen von Gefsner, Aldrovand, Bochart, Linné, Shaw (dem Reisebeschreiber), Buffon und Pennant zu sichten und zulässigere Beziehungen zu finden, ist Pallas, der, indem er diese ganze merkwürdige Sippschaft der Wiederkäuer zuerst einer gesonderten Betrachtung unterwirft und ihr den Namen Antilope [1] beilegt, zugleich das Irrige in vielen jener Deutungen nachweiset und mit einer umfassenderen Kenntnifs von den Thieren selbst, nicht nur die Namen welche Griechen und Römer dafür anwenden, sondern auch die, welche sich in den heiligen Schriften und bei den arabischen Schriftstellern dafür vorfinden, zu erklären bemüht ist. Ihm waren nämlich die damals im südlichen Africa entdeckten Antilopen-Arten ein Gegenstand genauerer Untersuchung geworden. Viele derselben haben in ihrer Bildung manches Gemeinsame mit denen, die das nördliche Africa erzeugt

---

[1] Pallas erklärt sich über die Anwendung dieses Namens, indem er (*Spicil.* XII, *p.* 1.) anführt, was Bochart bei Gelegenheit des *Iachmur biblicus* von dem Namen *Antholops* und *Anthalopus*, die bei den Kirchenvätern vorkommen, sagt, dafs sie nämlich nicht griechisch sondern vielmehr koptisch seien und hirschähnliche Thiere bedeuten. Er fügt hinzu, Linné habe davon den Namen *Antilope* genommen, den er in der ersten Ausgabe seines Systems einem der fabelhaften Thiere beilege.

In der ersten, erst spät so berühmt gewordenen Ausgabe seines Systems hat Linné indessen die *Antilope* noch nicht in das Verzeichnifs der paradoxen Thiere aufgenommen, sondern dies geschieht erst in der zweiten (Holm. 1740. kl. 8vo.) mit den Worten: *Antilope, facie ferae, pedibus pecoris, cornibus caprae serratis*; (ganz nach Eustathius im Hexaëmeron). Von da an wird der Name *Antilope* bald in seiner jetzigen Bedeutung gebraucht; so findet er sich bei französichen und englischen Schriftstellern derselben Zeit, z.B. in Shaw's Reisen sowohl in der englischen als französischen Ausgabe (1743) wo die Gazelle (*Dorcas*) *l'Antilope commune* genannt wird. In der neunten von Gronov besorgten Ausgabe des Linnéischen Systems (1756) welcher die französischen Namen beigefügt sind, ist *Capra Gazella* durch *l'Antilope* wiedergegeben. Welcher Schriftsteller aber ihn zuerst im Lateinischen vor 1740 gebraucht habe, ist mir noch nicht gelungen aufzufinden.

und man wird es Pallas verzeihn, dafs er sich danach dieselben Formen durch den ganzen africanischen Continent verbreitet vorstellte, wenn man bedenkt, dafs wir ja jetzt kaum erst anfangen, das Wesen der stationären Thiere auf ihren natürlichen Standort, auf dessen Erhebung über der Meeresfläche, Ebenheit, Trockenheit, mittlere Temperatur, vegetabilischen Reichthum u. s. w. in bestimmtere Beziehung zu bringen und dasselbe als abhängig von diesen constanten Bedingungen zu erkennen, mithin danach auch jetzt erst einer jeden Thierart ein viel enger umschriebenes eigentliches Vaterland anweisen, als man sonst zu thun gewohnt war. So mufste also auch Pallas, misleitet von dieser einzigen unrichtigen Voraussetzung in öfteren Irrthum verfallen, aber er irrt nach gründlicher Untersuchung und seine Irrthümer bleiben belehrend, indem sie es zunächst sind, die uns auf den merkwürdigen Parallelismus der beiden africanischen Faunen diesseits und jenseits des Aequators in den Breiten der Wendekreise aufmerksam machen. Wie in so vielen anderen Gattungen, so hat auch unter den Antilopen fast jede der nordafricanischen Arten ihr Entsprechendes an der Südspitze ihres vaterländischen Welttheils, ein zunächst Verwandtes nach Leibesgestalt, Haar-, Huf- und Hornbildung, das meistens nach allen diesen Puncten eben so isolirt unter den Gattungsverwandten seiner Gegend dasteht, als sie selbst unter den andern Arten von denen sie zunächst umgeben ist. Wie nahe aber auch oft solche sich entsprechende Arten einander verwandt sind, sie tragen immer jede die bestimmtesten specifischen Merkmale, von denen die mehrsten, indem sie zugleich andern Arten derselben Gegend zukommen, zugleich einen gewissen Local-Character involviren, der für die oben angedeuteten Gesichtspuncte gewifs nicht ohne Interesse sein kann. So ist, um Beispielshalber nur Einiges anzuführen, unter allen Antilopen-Arten die den weit ausgedehnten, trocknen, lichtreichen, in unermefslichen Ebenen sich ausbreitenden Raum des nördlichen Africa bewohnen, keine von dunkler Färbung, manche vom reinsten Weifs; im südlichen Africa dagegen, das sich, immer schmaler, zwischen grofsen Meeresräumen hin erstreckt und von der Mitte gegen die Küsten in breiten Abstufungen und ohne dazwischen liegende eigentliche Wüstenstrecken abdacht, kommt diese helle Färbung als Gesammtfarbe des Leibes auch nicht ein einzigesmal vor; die

in den waldigen Gegenden des Kafferlandes sind tiefbraun, *Ant. sylvatica* endlich fast schwarz.

Das Haar der nordafricanischen ist kurz, dünn, glattanliegend; das der südafricanischen dicht, meist lang, zuweilen wollig und an der einen Art, die die höheren Gebirgszüge bewohnt, dem sogenannten Klippspringer *Ant. Oreotragus* das dichteste, struppigste und elastischste, das wir überhaupt an einem wiederkäuenden Thier kennen.

Die einander entsprechenden Arten der Antilopen in den beiden gemäfsigten Zonen Africa's indessen blofs für klimatische Varietäten anzusehn, hindert uns nicht allein die Unkunde von dem grofsen dazwischen liegenden heifsen Erdstrich und die Vermuthung von dessen gänzlicher Unwirthbarkeit für so grofse Wiederkäuer, sondern auch die so sehr bedeutende anderweitige Verschiedenheit derselben von einander. Nach unsern jetzigen Annahmen über den Begriff der Species können sie demnach nicht anders, denn als verschiedene Arten betrachtet werden, und ich stehe nicht an, zu behaupten, dafs nicht eine einzige Art dieser Gattung beiden Gegenden gemein sei, dafs alle nordafricanische Arten wesentliche Verschiedenheiten von den südafricanischen haben. Demnach wäre die Beziehung der alten griechischen und lateinischen Namen auf die südafricanischen Thiere dieser Gattung durchaus unzulässig und um so mehr zu verwerfen, als sich zeigen läfst, dafs jene Namen gröfstentheils nur auf die jetzt erst wieder entdeckten und hier zu beschreibenden Antilopen des nördlichen Africa passen.

Vor vielen andern hat mir daher dieser Gegenstand würdig geschienen, dafs er der Akademie vorgelegt werde, und ich mufste um so mehr Beruf zu seiner Bearbeitung fühlen, als ich nicht nur eine Verpflichtung habe, den Verdiensten der wackeren Naturforscher, denen wir diese Entdeckung verdanken, die gerechte Anerkennung zu verschaffen, sondern auch zur Aufklärung eines Gegenstandes beizutragen, der in der neuesten Zeit die Aufmerksamkeit der Zoologen in besonderem Grade in Anspruch genommen hat. Die Gattung der Antilopen ist nämlich seit Pallas zuerst von mir selbst [1], dann von Herrn

---

[1] Magazin der Gesellschaft Naturforschender Freunde 6r Jahrgang 1812 S. 147.

Goldfufs ([1]), ferner von Herrn G. Cuvier ([2]), demnächst von Herrn Afzelius ([3]), und zuletzt von den Herren Blainville und Desmarets ([4]) einer neuen Bearbeitung unterworfen worden, ohne dafs sich Einer von uns rühmen könnte, gerade für diesen Theil derselben etwas geleistet zu haben. Eine neue Zusammenstellung der Arten, die ich beabsichte und zu welcher mich der besondere Reichthum unsers Museums vorzüglich in Hinsicht auf die südafricanischen auffordert, in welcher aber ausführlichere Untersuchungen wohl nicht Platz finden dürften, wünsche ich durch gegenwärtige Abhandlung vorzubereiten.

Es scheint mir gerathen, dem was ich über jede Art zu sagen habe, eine kurze Beschreibung derselben voranzuschicken, auf welche sich die Vergleichung der anderweitigen Angaben dann desto leichter beziehen mag.

I. ANTILOPE LEUCORYX Pall. Tab. I.

Von der Gröfse des Hirsches, weifs von Farbe, am Halse mit leichtem eisenrostfarbigen Anflug; ein Fleck auf der Stirn, Mitte des Nasenrückens und Seitenstreif des Kopfes (von der Wurzel des Horns durch das Auge bis fast zum Mundwinkel) mattbraun, Schnauze reinweifs. Schwanz wie beim Rind, mit einer weifsen Endquaste, die an der Spitze schwarz ist, bis an das Hackengelenk reichend. Hörner von der halben Länge des Leibes, rund, säbelförmig gekrümmt, bis in die Mitte mit (26-40) Ringen umgeben. Gestalt zugleich zierlich und kräftig, wenn gleich nicht schlank, sondern wohlgenährt und rund, doch fein im Knochenbau, nur mit etwas aufgetriebenem Fufs-Gelenke. Das Haar sehr kurz, grob, dicht anliegend, nur auf der Mitte des Rückens länger und etwas gesträubt. Auf der Mitte des Kreuzes ist ein Haarwirbel und von diesem bis an den Hals haben diese längeren Haare sämmtlich die verkehrte Richtung nach dem Kopf hin. Von Mähne, Hals- oder Kniebüscheln ist keine Spur da. Die Knie sind vielmehr nackt und schwielig.

([1]) Schrebers Säugethiere, Fortsetzung 1817.
([2]) *Dictionnaire des Sc. naturelles, vol.* III, *pag.* 223.
([3]) *Nov. Act. Upsal. Tom.* 7, *p.* 257.
([4]) *Nouv. Bulletin de la Soc. philom.* 1816. und *Mammalogie* II, *p.* 450.

Ausmessuug nach zwei gleich grofsen Exemplaren ([1]):

	Fufs		Zoll	
Ganze Länge von der Schnauze bis zur Schwanzwurzel	5		8	
Länge des Kopfes bis mitten zwischen dem Gehörn....	„	—	11½	—
— von da bis zum Widerrüst	1	—	7½	—
Höhe vom Widerrüst bis zum Boden	2	—	11½	—
— vom Kreuz bis zum Boden	3	—	1½	—
Umfang des Halses in der Mitte	1	—	6	—
— des Vorderleibes	3	—	6	—
— des Hinterleibes	3	—	3	—
Länge des Unterarms	„	—	12½	—
— der Röhre vom Handgelenk bis zur Fessel	„	—	8½	—
— der Fessel	„	—	2¾	—
— der Vorderhufe	„	—	1¾	—
— der Afterhufe	„	—	⅚	—
— der Schiene vom Knie bis zum Hacken	1	—	3½	—
— der Röhre vom Hacken bis zur Fessel	1	—	1	—
— der Fessel	„	—	2¾	—
— der Hinterhufe	„	—	2	—
— der Afterhufe	„	—	¾	—
— des Schwanzes von der Wurzel bis zum letzten Wirbel	1	—	1½	—
— des schwarzen Haars an seiner Spitze	„	—	10	—
— der Hörner auf der vordern Krümmung	3	—	„	—
— der Hörner auf der Sehne gemessen	2	—	8½	—
Umfang der Hörner an der Wurzel	„	—	4½	—
— — — in der Mitte	„	—	3½	—
— — — 6 Zoll vor der Spitze	„	—	1¾	—

Es leidet keinen Zweifel, dafs dieses Thier der *Oryx* der Alten sei. Das Epitheton: Getulus, das er bei so vielen Schriftstellern ([2])

([1]) Für die Längenmafse kann ich mit ziemlicher Sicherheit einstehn; der Umfang des Leibes kann durch das Ausstopfen der sehr zerschossenen Haut etwas verloren haben. Auch die nach diesem ausgestopften Exemplar verfertigte Abbildung erscheint daher etwas schmächtiger, als das Thier wirklich sein mag.

([2]) Juvenal XI, 140. Martial XIII, 92.

trägt und das Zeugnifs der Aegypter, auf das man sich bei den Angaben über ihn stets beruft, beweisen wohl zur Genüge, dafs das Thier, das man darunter verstehn soll, in derselben Gegend zu suchen sei, die uns die oben beschriebene Art geliefert hat. Unter den vielen Stellen bei den Alten, wo des *Oryx* erwähnt wird, und die Gefsner ziemlich vollständig gesammelt hat, sind wenige, die bestimmte Kennzeichen von ihm angeben. Der langen Hörner und des manchfachen Gebrauchs derselben wird am häufigsten gedacht, doch ohne irgend etwas davon zu sagen, woraus sich ein Beweis für meine Behauptung entnehmen liefse. Schon wichtiger ist was Plinius (1) von dem Haar sagt, indem er richtig bemerkt, dasselbe sei auf dem Mittelrücken in verkehrter Richtung gegen den Kopf hin gewachsen, welches nach oben gegebener Beschreibung auf unsre Antilope vollkommen zutrifft. Nur hat freilich die capische Antilope, welche Pallas *Oryx* nannte, dieselbe Haarbildung, und diese war ihm ein Hauptgrund ihr den alten Namen zuzuwenden. Dasselbe findet sich auch an einigen andern Antilopen, namentlich an *A. Eleotragus*, auch das *Zebra* hat etwas ähnliches.

Die Hauptstelle über den *Oryx* findet sich bei Oppian (*κυνηγ. Libr.* II, *v.* 445-488.). Was davon hieher gehört lautet also:

Ἔστι δέ τις δρυμοῖσι παρέστιος ὀξύτερος θήρ.
ἀγριόθυμος ὄρυξ, κρυερὸς θήρεσσι μάλιστα·
τοῦδ᾽ ἤτοι χροιὴ μὲν ἅτ᾽ εἰαρινοῖο γάλακτος,
μούναις ἀμφὶ πρόσωπα μελαινομένῃσι παρειαῖς·
διπλὰ δέ οἱ μετόπισθε μετάφρενα πίονα δημῷ.
ὀξεῖαι κεράων δὲ μετήοροι ἀντέλλουσιν
αἰχμαὶ πευκεδαναὶ μελανόχροον εἶδος ἔχουσαι·
καὶ χαλκοῦ θηκτοῖο, σιδήρου τε κρυεροῖο,
πέτρου τ᾽ ὀκριόεντος ἀρειότεραι πεφύασιν,
ἰοφόροι· κενεὴν δὲ φύσιν κεράεσσι λέγουσι (2).

---

(1) *Lib.* VIII, *cap.* 53. *Caprae in plurimas similitudines transfigurantur. Sunt capreae, sunt rupicaprae, sunt ibices pernicitatis mirandae, sunt et Oryges, soli quibusdam dicti contrario pilo vestiri et ad caput verso. Sunt et Damae et Pygargi et Strepsicerotes multaque alia haud dissimilia. Sed illa Alpes, haec transmarini situs mittunt.*

(2) In Schneider's Uebersetzung: *Est autem quaedam sylvarum incola, acutis cornibus fera, saevus Oryx, formidandus bestiis maxime. Huius color quidem tanquam verni lactis, solis in facie nigricantibus genis. Duplex autem ei pone dorsum, opi-*

Diese poetische Schilderung enthält nichts, das nicht vollkommen auf unsre Antilope paſste; die milchweiſse Farbe, die nur an den Wangen dunkler ist, das zu beiden Seiten des Hinterrückens liegende Feist und die spitzen, langen, harten, schwarzen Hörner, von denen der Dichter sogar die ganz richtige Bemerkung erfahren hat, daſs sie hohl sind [1], dies Alles trifft vollkommen zu und man hat nicht mehr nöthig, wie bisher, eine dichterische Uebertreibung anzunehmen, um eine Deutung dieser Stelle zu finden.

Wie der Name *Oryx* mit dem Gebrauch, den das Thier selbst von seinen Hörnern macht, oder zu dem man es beim Ackerbau anwendete und wonach man später selbst einen Theil des Pfluges so benannte, zusammenhängt, ist eine Frage, zu deren Erörterung ich mich nicht hinreichend gerüstet fühle. Aus allen Stellen aber, die dafür angeführt werden können, z. B. bei Agatharchides, Strabo und Lampridius, geht hervor, daſs diese Hörner durch ihre Länge, Schärfe und Härte ausgezeichnet seien; nur erwähnt Niemand der Ringe, mit welchen sie an der unteren Hälfte umgeben sind; auch wird nirgends gesagt, ob sie völlig gerade oder etwas gebogen sich zeigen.

Herodot erzählt (*Lib.* IV.): Bei den africanischen Hirtenvölkern gebe es unter andern vielen wilden Thieren die *Oryges*, von der Gröſse des Rindes, aus deren Hörnern die Arme der musicalischen Saiten-Instrumente verfertigt werden (*τῶν καὶ τὰ κέρεα τοῖσι φοίνιξιν οἱ πήχεις ποιεῦνται*) zu welchem Gebrauch, eben wegen der Ringe, die Hörner unsers *Oryx* sich auch vorzüglich zu eignen scheinen.

Aristoteles [2] erwähnt bekanntlich des *Oryx* als einhornig und Plinius schöpft aus ihm, wenn er sagt [3]: *Solida un-*

---

mum adipe: Acuti porro cornuum alte prominent mucrones tetri, nigri specie, qui aeri acuto, ferroque atroci, saxoque duro praestant, venenati; cava vero cornua natura esse aiunt.

(1) Es wird hier wahrscheinlich nur im Gegensatz gegen solides Hirschgeweih, das Horn hohl genannt. Doch wäre vielleicht auch möglich, daſs den Beobachtern die ansehnlichen inneren Knochenhöhlen, die sich bis zum zweiten Drittheil der Länge in dem Stirnzapfen hinauf erstrecken, aufgefallen wären.

(2) *Arist. hist. anim. Lib.* II, *cap.* 1. und *de part. anim. Lib.* III, *cap.* 2.

(3) *Lib.* XI, *cap.* 16.

gula et bicorne nullum. Unicorne asinus tantum indicus, unicorne et bisulcum Oryx.

Wenig Vorstellungen aus dem Thierreich haben zu allen Zeiten so sehr, zugleich den Wunderglauben des Volkes, die Phantasie des Dichters und den Forschungsgeist der Gelehrten in Anspruch genommen, als die vom Einhorn. Ich will den Streit hier nicht anregen, der wenigstens durch P. Camper [1] nicht geschlichtet zu sein scheint, ob man das Dasein eines vierfüſsigen und zwar ein- oder zweihufigen Thiers mit einem wahren von Hornmasse überzogenen Stirnzapfen, der nach ursprünglichem Bildungsgesetz immer nur in der einfachen Zahl vorhanden, in der Mitte des Kopfes stehe, aus physiologischen Gründen für unstatthaft halten solle oder nicht. Mag man die Entdeckung eines solchen Wesens immerhin noch von der Zukunft erwarten, soviel scheint mir gewiſs, daſs man die Stellen der heiligen Schrift, so wie die mehrsten bei den Profanscribenten, wo des Einhorns erwähnt wird, nicht anders als von diesem unserm *Oryx* verstehn könne. Namentlich bezeichnet das Wort ראם oder רים (*Reem* oder *Rem*) in der Bibel, das von allen Uebersetzern durch Einhorn wiedergegeben zu werden pflegt, wie schon Bochart [2] sehr gelehrt erwiesen hat, unläugbar ein Thier aus der Antilopen-Gattung und die arabischen Schriftsteller, deren Zeugniſs hier die mehrste Gültigkeit hat, erklären das Wort *Rím* (ريم) geradezu als den Namen einer Gazelle von rein-weiſser Farbe, die sich in sandigen Gegenden aufhalte [3]. Bochart gelangt in seiner Untersuchung zu dem Resultat, diese Gazelle könne keine andre, als eben der *Oryx* der Alten sein, und derselben Meinung sind, wenn gleich

---

[1] Schreiben an die Gesellschaft Naturforschender Freunde zu Berlin, in deren Schriften 7r Band (oder Abhandlungen 1r Band) S. 219.

[2] *Hierozoicon Lib.* III, *cap.* 26 *et* 27. Letzteres führt die Ueberschrift: *Probatur, Reem non esse Monocerotem nec Urum, sed bicornis capreae speciem aut Orygem.* In der Rosenmüllerschen Ausgabe (II, S. 351) wird schon das *Rím* der Araber durch die Pallassche *Ant. Leucoryx* erklärt. Man vergleiche auch *Hierozoïcon Lib.* VI, *c.* 12. *de Monocerote.*

[3] So z. B. Alcamus, Giggejus, Damir, Alasmajus u. A. Vgl. Niebuhr Beschreibung von Arabien, Vorbericht S. 38, wo erzählt wird, daſs noch jetzt zu Haleb unter dem Worte *Rim* eine weiſse Gazelle verstanden werde.

unter mancherlei Bedenken, Michaelis [1], Walther [2] und Meyer [3], bei welchen alles zu finden ist, was sich über diesen Gegenstand sagen liefs, so lange das Thier selbst, um welches es sich handelt, nur aus den Schriften und nicht in der Natur bekannt war.

Die Haupt-Bedenken und Zweifel gegen die obige Meinung mufsten nämlich immer daraus entspringen, dafs sowohl dem *Oryx* an den mehrsten Stellen, als dem *Rîm* der Araber zwei Hörner beigelegt werden, das einhornige *Reem* also von beiden ganz verschieden sein müsse, was denn zu der Annahme führte, es habe mindestens zweierlei Landthiere [4] gegeben, welche beide von den Alten *Oryx* genannt worden seien.

Diese Zweifel lösen sich dahin auf, dafs der *Oryx* in einem ungewöhnlichen Falle von Verstümmelung, der aber im Alterthum nicht so sehr selten gewesen sein mag, auch als einhorniges Thier vorkommt. Vermuthen liefs sich dieses schon aus der Analogie mit ähnlichen Erscheinungen, z. B. an der *Ant. Saiga*, deren Beispiel Pallas zur Begründung seines Urtheils über das Einhorn als fabelhaftes Thier, zu Hülfe ruft [5]. Dieselbe Vermuthung habe ich in meiner Abhandlung über die Antilopen, bei Gelegenheit der *Ant. Leucoryx* ausgesprochen. Bestätigt aber wird sie aus den bildlichen Darstellungen von unsrer Antilope, die sich in den inneren Räumen der Pyramide von Memphis finden [6]. Hier werden Beschäftigungen des Landlebens vorgestellt, unter andern Männer, die den *Oryx* theils an den Hörnern, theils an um den Hals geworfenen Seilen führen, theils mit Stecken vor sich her

---

[1] *Supplem. ad lexica hebraica. Pars* VI, *p.* 2213.

[2] In Eichhorn's Repertorium für Bibl. Litteratur. 16r Theil S. 101.

[3] Versuch über das vierfüfsige Säugethier *Reem* der heiligen Schrift, vom Dr. F. A. A. Meyer, Leipzig 1796. Die Nachrichten vom *Oryx* sind hier sorgfältig zusammengestellt, auch die Meinungen, dafs unter dem Einhorn der Rhinoceros oder eine Rinder-Art verstanden sein könne, geprüft, weshalb hier dies Alles übergangen und auf diese Schrift verwiesen werden kann.

[4] Der *Oryx marinus* des Strabo mag wohl wie Schneider annimmt, der *Narval* sein, wenn anders Gefsner nicht Recht hat, der einen Delphin (*Orca*) darunter vermuthet, was wenigstens zu der Gegend, von welcher die Rede ist (den gallischen und spanischen Küsten) besser pafst.

[5] *Spicil. zool. Fasc.* XII, *p.* 35 *et* 63.

[6] *Description de l'Égypte, Vol.* V, *Tab.* 18. *fig.* 9 *et* 10.

treiben, wie wenn sie mit seiner Bändigung oder Zähmung beschäftigt wären. Unter den fünf Gruppen dieser Art, die unter der zu dieser Abhandlung gehörigen Abbildung des *Oryx* (Tab. I.) wiedergegeben sind, stellen zwei das Thier mit dem Doppelhorn von natürlicher Gestalt und Richtung dar, die drei andern dagegen mit einem einzigen Horn das auf verschiedne Weise gekrümmt und verdreht ist.

Diese Darstellungen sind unläugbar von grofser Wichtigkeit für die vorliegende Frage. Dafs der *Oryx* wirklich damit gemeint sei, läfst sich aus der Uebereinstimmung mit der Gestalt unsers Exemplars leicht darthun, denn dafs sie etwas plumper von Gestalt und von kürzeren Läufen sind, liegt entweder an der Unbeholfenheit der älteren Plastik oder daran, dafs das ausgestopfte Exemplar unsers Museums, dessen Haut sehr zusammengeschrumpft war, etwas zu schlank gerathen ist ([1]). Demnächst scheint mir die Hauptstelle der heiligen Schrift, aus welcher man die Unbändigkeit des Einhorns beweisen will ([2]), nicht sowohl anzudeuten, dafs es überhaupt nicht gezähmt, als nur, dafs es nicht zu den Geschäften des Ackerbaues abgerichtet werden könne. Selbst die Ausführlichkeit mit welcher der Dichter solchen Versuch als vergeblich schildert, läfst voraussetzen, dafs ihm Beispiele davon vorschwebten. An einer andern Stelle ([3]) werden die Einhörner geradezu unter den Hausthieren genannt. Wiederum ist einmal ([4]) bildlicherweise die Rede von

---

([1]) Herr Dr. Ehrenberg, der eben beim Abdruck dieser Abhandlung wieder bei uns eintrifft, erklärt, das letztere sei der Fall und die Antike gebe die Gesammtgestalt des Thiers sehr treu wieder.

([2]) Buch Hiob Cap. 39. Vs. 12-15. „Meinst du, das Einhorn werde dir dienen und werde bleiben an deiner Krippen? — Kannst dû ihm dein Joch anknüpfen, die Furchen zu machen, dafs es hinter dir brache in den Gründen? — Magst du dich auf es verlassen, dafs es so stark ist? Und wirst es dir lassen arbeiten? — Magst du ihm trauen, dafs es deinen Samen dir wieder bringe und in deine Scheune sammle?"

([3]) Jesaia Cap. 34. Vs. 7. „Da werden die Einhörner sammt ihnen (den Lämmern und Böcken) herunter müssen und die Farren sammt den gemästeten Ochsen." Auf ähnliche Weise wird des *Oryx* als eines Hausthiers gedacht bei Heliodorus (*Hist. Aethiop. Lib.* 10. der von der Persina, Königin der Aethiopier erzählt, sie habe zu Opfern und Gastmälern angewendet *βοῶν τε ἀγέλας, καὶ ἵππων καὶ προβάτων, ὀρύγων τε καὶ γρυπῶν.* (Nach Bochart's Verbesserung a. a. O.)

([4]) Psalm 29. Vs. 6. „Und (die Stimme des Herrn) macht sie lecken (hüpfen, springen) wie ein Kalb, Libanon und Sirion wie ein junges Einhorn.

der Zierlichkeit des jungen Einhorns, und daraus zu schliefsen, das Thier müsse in diesem seinem jugendlichen Zustande bekannt genug gewesen sein, um ein allgemein verständliches Bild davon entlehnen zu können. Wurde es also jung eingefangen und gezähmt? Die sonderbare Hörnerform der einhornigen auf unserer Abbildung läfst dies fast vermuthen. Denn solche Verdrehung der Hörner geschieht nicht in natürlichem Wachsthum, sondern kann nur durch die Hand des Menschen geschehn, wie noch heute die Kaffern ihrem Rindvieh die sonderbarsten Gestalten des Gehörns geben, um ihren Stofs minder gefährlich zu machen, welche Absicht auch eben bei der Zähmung des *Oryx* sehr nahe gelegen haben mufs.

Ueberhaupt ist an keiner Stelle der heiligen Schrift von dem *Reem* geradezu behauptet, dafs es nur ein Horn habe, an keiner findet sich etwas zu seiner bestimmteren Charakteristik. Der Hauptgrund ein einhorniges Thier unter dem *Reem* zu verstehn, liegt lediglich darin, dafs die Septuaginta dieses Wort durch μονόκερως übersetzen. Wie aber an dem Ort, wo die Uebertragung der heiligen Bücher der Israeliten in die griechische Sprache geschah, der *Oryx* zugleich den Namen des *Monoceros* gehabt haben könne, scheinen mir die memphischen Bilder leicht zu erklären, indem sie ihn sowohl einhornig als zweihornig vorstellen.

Indem ich gelehrteren Sprachforschern und Alterthumskennern die Prüfung dieser Meinung überlassen mufs, bemerke ich nur noch, dafs die beiden Einhorne, welche Ludovico Barthema oder Vartomanus [1] im Anfange des sechszehnten Jahrhunderts zu Meckha gesehn, höchstwahrscheinlich nur solche einhornige *Oryges*, gewifs aber Thiere aus der Antilopen-Gattung gewesen seien. Sie waren dem dortigen Sultan als ein kostbares Geschenk von einem Könige aus Aethiopien gesandt worden, also africanischen Ursprungs und auch in ihrem Vaterlande Seltenheiten. Die Abbildungen des Einhorns welche Bochart, wo er des Barthema erwähnt [2], ohne weitere Erklärung hinzufügt, haben gar keinen Werth, denn sie sind ganz offenbar aus blofser Vorstel-

---

[1] Beim Ramusio I, *fol.* 163 *b. ed. Venet.* 1563, auch beim Purchas *Pilgr. p.* 1489.
[2] *Hierozoïcon* III, *cap.* 26. *pag.* 955.

lung entworfen, stimmen nicht zu Barthema's Beschreibung und sind auch nur Copien einer alten italienischen Kupfertafel, die Bochart von dem gelehrten Philologen Huet erhalten hatte. Diese Abbildung war es daher wohl kaum werth, dafs sie Meyer zu seiner Schrift über das *Reem* noch einmal copiren liefs.

Wenn man ein grofses Gewicht darauf legen will, dafs Aristoteles und Plinius den *Oryx* einhornig nennen, so darf man dagegen auch nicht unerwähnt lassen, dafs er sogar auch vierhornig genannt wird. Aelian (¹) führt solche vierhornige *Oryges* unter anderen grofsen Seltenheiten aus dem Thierreich (zahme Tiger, gebändigte Parder, schnellfüfsige Rinder, gelbe Tauben und weifse Affen) an, welche die Indier ihrem Könige bringen. Gewifs ist hier von einer ungewöhnlichen Ausnahme, von einem in der Regel zweihornigen, nur in seltnem Naturspiel vier Hörner tragenden Thier die Rede, wie denn auch Pallas, eben in der vorhin angeführten Stelle, ohne Beziehung auf diese Angabe Aelians, von der *Antilope Saiga* erzählt, es gebe davon Männchen mit überzähligen Hörnern. Wir kennen zwar auch eine *Antilope quadricornis*, eine neuerlich entdeckte, wegen natürlicher Vierhornigkeit höchst merkwürdige Art, von welcher sich ein Schädel in der Sammlung des Dr. Brookes zu London befindet. Diese aber, da sie in Hinter-Indien zu Hause gehört, wird wohl schwerlich von Aelian gemeint gewesen sein können.

Künftige Beobachter werden an unserem *Oryx* noch Gelegenheit zu mancher interessanten anatomischen Untersuchung finden. Denn so ganz ohne alle Begründung kann doch die vielbesprochene Stelle bei Plinius (²) nicht sein: *Orygem perpetuo sitientia Africae generant et natura loci potu carentem et mirabili modo ad remedia sitientium. Namque Gaetuli latrones eo durant auxilio, repertis in corpore eorum saluberrimi liquoris vesicis.* Pallas (³) ist geneigt dies daraus zu erklären, dafs die Antilopen viel an Hydatiden im Netz leiden, die, meint er, an einem so grofsen Thier nicht unbedeutend sein können. Man mufs gestehn, dafs

---

(¹) *De natura animalium. Lib.* XV. *cap.* 14.

(²) *Lib.* X, *cap.* 73.

(³) *Spicil. zool.* XII, *p.* 64.

dies wenigstens immer noch eine natürlichere Erklärungsart ist, als wenn man annehmen wollte, diese Antilope könnte einen Kamelmagen mit Wasserzellen haben.

Wichtiger, zumal für die Beurtheilung der Meinungen, welche die Aegypter selbst von dem *Oryx* gehabt zu haben scheinen, ist folgende andre Stelle bei Plinius ([1]): *Orygem appellat Aegyptus feram, quam in exortu caniculae contra stare et contueri tradit ac velut adorare cum sternuerit.* Fast mit denselben Worten gedenken dieser ägyptischen Sage Damascius beim Photius und Aelian ([2]). Letzterer fügt noch hinzu: die Libyer rühmten, dafs ihre Ziegenheerden den Aufgang des Sirius vorherwüfsten und den Regen voremfänden. Es ist bekannt, wie wichtig den Aegyptern der heliakalische Aufgang des Hundsterns wegen seines Zusammentreffens mit dem Anschwellen des Nils war. Alle Naturerscheinungen, die zu dieser Zeit sich zeigten, erhielten dadurch eine gewisse Wichtigkeit und wurden auf das Segens-Gestirn bezogen. Manche, zumal in der belebten Natur, mochten auch wohl in ziemlich nahem Zusammenhang mit den Ursachen der Nil-Anschwellung stehn. Die Menge des fallenden Regens in den inneren Gebirgsgegenden, selbst die herabströmende grofse Wassermasse im Nilthale mochten durch ihre Verdunstung Veränderungen in der Atmosphäre hervorbringen, die sich mittelst der periodischen Luftströme weit in das Innere Libyens fortpflanzten und eben auch in dem Leben der dortigen Thiere periodische Erscheinungen bedingten. Viele Antilopen-Arten des südlichen Africa wandern alljährlich in gewissen Jahreszeiten nach bestimmten Richtungen, nämlich dem Luftstrom entgegen, der sie einmal (zur Zeit des Südostpassats) an die waldigen Küsten lockt, in der entgegengesetzten Jahrszeit aber, bei dem Regen bringenden Nordostwind, zu den dann reicher begrasten Karroo-Ebenen hinzieht. Sollte bei den nordafricanischen Antilopen der überhaupt bei den Wiederkäuern so stark entwickelte Geruchssinn und die Empfindlichkeit gegen Wasserverdunstung in der Atmosphäre ([3]), schwächer sein, als wo ich jene periodische Wande-

([1]) *Lib.* II, *cap.* 40.

([2]) *Lib.* VII, *cap.* 8.

([3]) In trocknen Ländern wittern Rinder und Kamele die Flüsse und Quellen auf meilenweite Entfernung.

rungen beobachtete? Es läfst sich gewifs denken, dafs der anschwellende Nil und die zu dieser Jahrszeit reichere Vegetation seines Thalweges, die Thiere der libyschen Wüste von weit her herbeilockt; deren Züge gehn dann von Westen nach Osten, sie scheinen alle nach Morgen zu schauen, das aufgehende Gestirn anzubeten. Auf den *Oryx* hat dann der veränderte Aufenthalt, vielleicht die Nahrung von frischen Kräutern, noch andere Wirkung. Μισοῦσι δὲ οἱ αὐτοὶ θεραπευταὶ τοῦ διὸς τοῦ προειρημένου (τοῦ Σαραπίδος) καὶ τὸν ὄρυγα· τόδε αἴτιον, ἀποστραφεὶς πρὸς τὴν ἀνατολὴν τὴν τοῦ ἡλίου τὰ περιττὰ τῆς ἑαυτοῦ τροφῆς ἐκθλίβει, φασὶν Αἰγύπτιοι ([1]). Einen andern Grund dieses Hasses giebt Orus ([2]) an. „Wenn der *Oryx*," sagt er, „in der Wüste an einen Ort kommt, wo Wasser ist, so trübt er dasselbe, nachdem er getrunken, mit seinen Lippen und verunreinigt es mit seinem Unrath, scharrt auch Staub mit den Füfsen hinein, dafs es anderen Thieren zum Trank nicht mehr taugt. Und weil nun die Göttin (Isis) alles, was in der Welt Nützliches, zeugt, vermehrt und belebt, so mufs der *Oryx* wohl gottlos und undankbar gegen sie erscheinen ([3])."

In der That lernt man auch aus den bildlichen Darstellungen der Aegypter, dafs der *Oryx* ein unheiliges Thier gewesen sein müsse. Auf keiner Abbildung in den Tempeln, Grabmälern und an den Todtenkisten, auf keiner der Papyrus-Rollen, die jetzt unsre Bibliothek zieren und so reich an bildlichen Darstellungen sind, ist eine Spur vom *Oryx* oder dessen Hörnern anzutreffen, so häufig sich auch die Hörner der Gazelle (*Ant. Dorcas*) darauf nachweisen lassen. Jene oben angeführten Bilder aus den memphischen Pyramiden, die nur die Geschäfte des Landlebens darzustellen scheinen, sind die einzigen mir bekannten auf welchen der *Oryx* vorkommt, und wenn bei den früheren Erklärern ägyptischer Bilder so oft von Oryxhörnern die Rede ist, so beweist dies nur, dafs man sich eben nichts bestimmtes bei diesem Namen gedacht und ihm eine ganz allgemeine Bedeutung gegeben habe.

([1]) Aelian. *Lib.* X, *cap.* 28.

([2]) *Hierogl. Lib.* I, *cap.* 46.

([3]) *Propter haec, immunditiei et turpitudinis hieroglyphon atque in tantum odiosum habebatur animal, ut solum Aegypti sacerdotibus in cibum esset damnatum. Pall. Spicil.* z. XII, *p.* 61.

Wiewohl nun dieses Thier schwerlich je anders als etwa in den Kampfspielen der Römer, lebend in Europa gesehn worden und die von unsern Reisenden übersandten Exemplare unläugbar die ersten sind [1], aus welchen sich sein Vorhandensein in dem Begriff der Alten erweisen läfst, so ist doch schon Kunde davon in vielen Werken der letztverflossenen Jahrhunderte. Aufser den schon oben, bei Gelegenheit des Einhorns, erwähnten Zeugnissen sind noch folgende wichtig genug, um angeführt zu werden. Der Pater Vincent Marie sagt im 12ten Cap. seiner Reise: „Ich habe in Mascat, einer Stadt des steinigen Arabiens, eine Art wilder Ochsen gesehen, von glattem, weifsen Haar, wie das des Hermelins; so wohlgebaut, dafs es mehr einem Hirsch, als einem Ochsen glich. Nur waren die Beine kürzer, aber fein und zum schnellen Laufe geschickt, der Hals kürzer, Kopf und Schwanz wie beim Rind, aber schöner gebaut, mit zwei schwarzen, harten, dünnen und langen Hörnern von drei oder vier Palmen Länge, mit Ringen umgeben, die wie gedrechselt oder schraubenförmig gestaltet aussahn." Diese Beschreibung pafst genau auf unsern *Oryx*. So erwähnt Jablonsky [2] bei Gelegenheit einer Erklärung des vermeintlichen Oryx-Opfers auf der Bembinischen Isis-Tafel des Berichtes von Paul Lucas, der in der Beschreibung seiner dritten Reise durch Aegypten (1714) folgendes erzählt: Es finden sich dort viel wilde Ziegen, die bei den Alten *Oryges* hiefsen. Sie wandern heerdenweis durch die Berge. Im Haar und Schwanz gleichen sie den Ziegen, in den Vorderfüfsen aber, die etwas kurz sind, den Dammhirschen. Der Hals ist lang, ohne Bart und schwärzlich. Sie haben gerade Hörner, die aber gegen die Spitze hin etwas gekrümmt sind.

Im Jahr 1717 fand Herr John Lock, Agent der Ostindischen Compagnie zu Ispahan, in dem Park des persischen Sultans zu Kassar, zwei Antilopen dieser Art, von welchen er Abbildungen verfertigen liefs und nach London übersandte, wo Herr Pennant sie im Brittischen Museum fand und zu seiner *Synopsis of Quadrupeds* benutzte. Er macht sie dort unter dem Namen der weifsen Antilope, unter Bezie-

---

[1] Später ist auch diese Antilope durch Herrn Rüppel an das Museum zu Frankfurt gesandt worden.

[2] *Opuscul* II, *p.* 234.

hung auf die obige Stelle beim Oppian, bekannt. Pallas hatte inzwischen in den Petersburger Commentarien ([1]) ein Horn beschrieben und abgebildet, das er in der dortigen Kaiserlichen Sammlung gefunden, und für das Horn des *Oryx* erkennt, und auf diese unterschiedenen Data gründet er dann die neue Art *Ant. leucoryx*, die im 12ten Fascikel seiner Spicilegien, unter Anführung Oppian's, zuerst erscheint. Lock's Angabe, diese Art sei auf der kleinen Insel *Baharein* im Golf von Bassora zu Hause und die Nachricht des Pater Vincent Marie verleiteten indessen zu der Annahme, es sei ein asiatisches Thier, wiewohl sich jetzt leicht annehmen läfst, dafs es als seltnes Geschenk den asiatischen Fürsten aus Africa zugesandt worden. In Shaw's *Zoology* (*Vol.* II, *P.* II, *p.* 315.) ist dann das in London befindliche Bild im Kupferstich wiedergegeben, nnd Herr Professor Goldfufs hat dasselbe in seiner Fortsetzung des Schreberschen Säugethierwerkes danach copirt und coloriren lassen (*Tab.* 156 *B.*). Auf diesen Bildern ist das Thier liegend vorgestellt, in der Ansicht von vorn, so dafs die Verkürzungen kein sicheres Urtheil über die Körper-Verhältnisse zulassen. Die Zeichnung des Kopfes stimmt wohl zu unserm *Oryx*, nur reicht der Backenstreif nicht ganz bis an das Horn und das Dunkel ist viel stärker aufgetragen. Auch findet sich ein breites dunkles Querband über jedem Vorderlauf, das unsre Exemplare nicht haben. Die Hörner, da sie fast ganz aus der vordern Ansicht gezeichnet sind, erscheinen fast gerade, heifsen aber in der Beschreibung leicht gekrümmt. Die Ringe an der unteren Hälfte sind nur leicht angedeutet und spiralförmig geführt.

Wiewohl viele der hier angeführten Abweichungen von der Bildung unsers *Oryx* es zweifelhaft machen können, ob man ihn in dem *Leucoryx* des Pallas wieder erkennen solle, so sind sie doch nicht erheblich genug, um beide für Wesen unterschiedener Art zu halten, und namentlich ist die stärkere oder schwächere Krümmung der Hörner kein Grund, eine solche Verschiedenheit anzunehmen. Unsre Reisenden haben nämlich aufser den beiden ganzen Exemplaren noch einige lose Hörner mitgesandt, die im Allgemeinen ganz von derselben Bildung, dennoch in dem Grade der Krümmung und der Zahl der Ringe von

---

([1]) *Nov. Commentarii Academiae Petropolitanae Vol.* XIII, *p.* 468.

einander eben so verschieden sind, wie von den bei Buffon ([1]) und Pallas ([2]) abgebildeten Hörnern, so dafs ich nicht zweifeln kann, es müssen diese sämmtlich einer und derselben Thierart, nämlich eben dem *Oryx* der Alten angehören. Die mindeste Krümmung ist die eines Horns von 36 Zoll Länge, das auf der Sehne 34 Zoll mifst (beinahe wie das von Pallas abgebildete); die stärkste dagegen findet sich an dem einen ausgestopften Exemplar, dessen Hörner ebenfalls 36 Zoll messen, aber in gerader Linie zwischen dem hintern Rand des ersten Ringes und der Spitze nur einen Raum von 32 Zoll haben. An dem andern ausgestopften, sonst ganz gleichen Exemplar, sind sie merklich gerader. Beide haben eine gleiche Zahl der Ringe, nämlich 26, deren letzter noch nicht die Mitte des ganzen Horns erreicht. Unter den losen Hörnern, die zugleich die ansehnlichen Höhlungen der Stirnzapfen gewahren lassen und unter einander in den Verhältnissen des Umfangs zu der Länge ganz übereinstimmen, hat eins 33, eins 40, eins sogar 48 Ringe, von denen aber dennoch der letzte nicht weit über die Mitte des Hornes hinausgeht; der geringelte Theil des Horns ist also kaum gröfser als bei den vorigen, nur stehn die Ringe gedrängter, sind aber in demselben Verhältnifs auch weniger erhaben und kräftig. Aus diesen Verschiedenheiten lassen sich also auch die abweichenden Angaben über die Richtung der Hörner erklären, die so mancherlei Zweifel und selbst den Hauptmifsgriff in der Erklärung des *Oryx* der Alten, durch den capischen sogenannten Gemsbock veranlafst haben, der von Pallas unter dem Namen *Ant. Oryx* in die systematischen Verzeichnisse eingeführt ist.

Beide aber unterscheiden sich wesentlich in folgenden Punkten. Der südafricanische *Oryx* oder Gemsbock ist erstlich wohl reichlich um das Doppelte gröfser, und dabei sind die Hörner an sich schon kürzer, also noch viel mehr im Verhältnifs zur Körperlänge. Beim ägyptischen *Oryx* messen sie fast die Hälfte der Leibeslänge, hier kaum ein Viertheil. Sie sind ferner hier fast gerade, auf der vorderen Krümmung $32\frac{1}{2}$ Zoll lang, auf der Hinterseite nach der Sehne gemessen

---

([1]) *Hist. nat. Vol.* XII. *tab.* 33, *f.* 1.

([2]) *Nov. Comment. Petrop. Vol.* XIII, *tab.* 10. und *Spicil. zool. Fasc.* XII, *tab.* 3. *f.* 1.

nicht weniger als 31$\frac{1}{2}$ Zoll, dabei ansehnlich dicker und ihr Umfang ist an der Basis 6$\frac{1}{2}$ Zoll, in der Mitte 4$\frac{1}{2}$ Zoll, vor der Spitze 6 Zoll, beim *Oryx* dagegen: an der Basis 5 Zoll, in der Mitte 4 Zoll, vor der Spitze 2$\frac{1}{4}$ Zoll. Die Zahl ihrer Ringe wechselt an vier Paaren, die ich zur Vergleichung vor mir habe, zwischen neunzehn und vierundzwanzig. Der letzte derselben reicht aber immer weit über die Mitte hinaus und die vorletzten sind weit von einander abstehend, breit aber flach, die unteren vorzüglich kräftig und hoch gegen die dazwischen liegenden gefurchten Vertiefungen. Die oben angeführte Kupfertafel bei Buffon (XII, 33.) stellt die Hörner beider Arten neben einander dar. Die flüchtigste Vergleichung läfst keinen Zweifel, dafs sie unterschiedenen Thieren angehören, wie Buffon auch selbst annimmt. Ferner ist der capische *Oryx* in Farbe und Haar auffallend vom ägyptischen verschieden. Die einzige Uebereinstimmung in Hinsicht auf dem ersten Punkt ist, dafs auch hier das Haar, wie schon oben erwähnt, längs dem Rückgrat, vom Kreuz bis zum Kopf rückwärts läuft. Das Haar ist übrigens aber durchgehends länger, reicher und dichter. Die Farbe ist rothgrau, auf der Mitte des Rückens dunkler; ein Streif von den Weichen bis zum Ellenbogen, der Seitenstreif des Kopfes vom Horn zum Mundwinkel, der Nasenrücken, ein Stirnfleck in Gestalt eines V und der Unterhals sind schwarzbraun, desgleichen eine breite Binde über jedem der Vorderschenkel. Wenn nun gleich in dieser Zeichnung des Leibes so viel Aehnlichkeit mit dem *Oryx* liegt, dafs man daraus Cuvier entschuldigen mufs, wenn er sie beide nur als Varietäten einer und derselben Art will gelten lassen, so sind doch die übrigen Punkte völlig entscheidend und wem noch Zweifel bleiben, der vergleiche die oben angegebenen Dimensionen mit den Verhältnissen des capischen *Oryx*, die in den neuern systematischen Werken angegeben sind, und betrachte sich beide Arten neben einander.

In Hinsicht auf die systematischen Namen beider dieser Arten wird sich wohl jeder Zoologe mit mir dahin vereinigen, dafs es bei den von Pallas gegebnen, nun schon ein halbes Jahrhundert gültig gewesenen Benennungen verbleiben müsse und dafs der Name *Oryx* also nicht wieder in sein ursprüngliches Recht eingesetzt werden könne, wenn nicht eine Verwirrung angerichtet werden soll, die durch die ge-

ringen Vortheile einer vollkommen richtigen Anwendung jenes Namens schwerlich aufgewogen werden dürfte.

Schliefslich habe ich noch zu bemerken, dafs diese Antilope nach Herrn Doctor Hemprich's Bericht bei den Arabern des *Sudan* den Namen *Abu-harbe* führt.

II. ANTILOPE ADDAX N. (¹) Tab. II.

Diese Art ist von Gröfse und Gestalt eines Esels (über 6 Fufs lang und 3 Fufs hoch) von feistem Körperbau, ganz weifs von Farbe, doch am Oberhals mit bräunlicher Beimischung und fast ganz braunem Kopf. Dieser hat nämlich einen dunkelrothbraunen Scheitelfleck, der hinter den Hörnern einen Halbkreis von 5 Zoll Halbdurchmesser einnimmt, vorn aber zwischen den Hörnern bis über die Stirn in bogenförmigem Umrifs ($4\frac{1}{2}$ Zoll weit) vortritt; vor den Augen zieht sich ein (in der Mitte $1\frac{1}{2}$ Zoll breites und 7 Zoll langes) schneeweifses Querband bis an die Wangen hin, die dann selbst samt der Schnauze mattbraun von Farbe sind. Ueber den Mundwinkeln wird die Farbe wieder heller und zu beiden Seiten der Nase zeigt sich über den Lippen ein schmuzigweifser Streifen. Der Schwanz ist 10 Zoll lang, an der Spitze mit einer 2 Zoll langen Quaste von schneeweifsen Haaren besetzt. Die Behaarung ist kurz, grob, dicht anliegend, nur der dunkle Stirnfleck trägt längeres, sich von der Mitte gegen den Umfang aufkrümmendes und die Wurzeln des Gehörns deckendes Haar. Die Ohren messen 6 Zoll Länge und nach dem mittleren Umfang $3\frac{1}{2}$ Zoll Breite, sind aufsen mit dicht anliegendem, innen mit längerem, abstehenden, weifsen Haar bekleidet und nur an der äufsersten Spitze schmutzig rostfarben. Die Hörner liegen in der Ebne des Nasenrückens, sind lang, spiralförmig gedreht und mit Ringen umgeben, und zwar unter folgenden genaueren Bestimmungen: An der Wurzel erscheinen sie nicht ganz rund, sondern von vorn nach hinten unmerklich zusammengedrückt, nach der in-

---

(¹) Der *Strepsiceros* und *Addax* des Plinius. Nur der letzte dieser beiden Namen kann zur Bezeichnung der Art im System gebraucht werden, da der erste bereits einer andern Art zugewendet worden.

neren Seite am mehrsten von der kreisrunden Gestalt des Umfanges abweichend (also hier stumpf gekantet). Bis 4 Zoll über der Wurzel sind sie von schmutziggelber Farbe und fast glatt, dann wird die Farbe allmählig dunkler und es zeigen sich immer bestimmtere und durch tiefere Zwischenräume gesonderte, wellenförmige Ringe, während jedes Horn in seiner Krümmung nach aufsen und hinten eine mäfsige Spirallinie beschreibt und sich dabei gleichzeitig halb um seine eigne Längen-Achse dreht, so dafs wenn die erste Windung vollendet ist, die hintere weniger von den Ringen umfafste und fast flache Seite die vordere wird. Nun folgt noch eine zweite Windung mit deren Ende das Horn sich einmal ganz um seine Achse gedreht hat, und von hier an werden die Ringe flacher und weiter und von dem letzten derselben, welcher an unserm Exemplar der achtundzwanzigste ist, verläuft das Ende sich völlig gerade (der Längenachse der Spirallinie parallel), glatt und schwarz in eine immer dünnere, zuletzt scharfe Spitze. Die Länge jedes Horns von der Wurzel bis zur Spitze in gerader Linie ist $27\frac{1}{2}$ Zoll, nach der Krümmung auf der Vorderseite gemessen aber 33 Zoll; der Umfang an der Basis beträgt 5 Zoll, in der Mitte $3\frac{1}{2}$, 6 Zoll vor der Spitze $2\frac{1}{2}$ Zoll. Unmittelbar an der Wurzel ist zwischen den Hörnern nur $1\frac{1}{2}$ Zoll Zwischenraum. Wo sie in der ersten Windung sich am weitesten von einander entfernen, beträgt der Zwischenraum 12 Zoll; sie treten dann aber in ihrer ferneren Windung noch auf eine Nähe von 9 Zoll wieder zusammen, gehn von hier an aber immer weiter auseinander und zwischen einer Spitze und der andern ist ein Raum von 20 Zoll.

Aufser diesen Hauptmerkmalen sind noch folgende charakteristisch: 1) ein Haarwirbel im Nacken, 3 Zoll hinter den Hörnern, von welchem eine kleine Mähne, aus dünnen, etwa 2 Zoll langen Haaren zusammengesetzt, anfängt, die fast bis an das Widerrüst reicht und welcher an der Unterseite des Halses ein ganz ähnlich gebildeter Kehlschopf entspricht; 2) sehr hochliegende, schräg gestellte Augen, die vorzüglich dazu beitragen, dem Thier in der Bildung des Kopfes eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Ziegenbock zu geben; 3) aufserordentlich breite und platte Hufe, besonders an den Vorderfüfsen, wo sie mit so weit überstehenden Rändern vortreten, dafs die Spur $3\frac{1}{2}$ Zoll Breite hat, indessen der Durchmesser der Fessel dicht über dem Huf nur 2 Zoll be-

trägt; an den Hinterfüfsen sind alle diese Theile um ein Viertheil kleiner. Die Gelenke der Füfse sind etwas aufgetrieben und geben den Läufen ein etwas plumpes Ansehn, das diese Art von den mehrsten so ungemein zierlich gebauten Gattungs-Verwandten unterscheidet.

Das einzige Exemplar, welches unsre Reisenden übersandt haben, ist ein weibliches. Es läfst sich vermuthen, dafs die männlichen Individuen noch gröfser und stärker und von ansehnlicherem Gehörn sein werden.

Genauere Ausmessung.

	Fufs	Zoll	Linien
Ganze Länge von der Schnauze bis zur Schwanzwurzel	6 Fufs	„ Zoll	„ Linien.
Länge des Kopfes bis mitten zwischen dem Gehörn	1 —	„ —	„ —
— von da bis zum Widerrüst	1 —	8 —	„ —
— — — — zur Schwanzwurzel	3 —	4 —	„ —
— des Schwanzes	„ —	11 —	„ —
— des überragenden Haars an dessen Spitze	„ —	1 —	„ —
Höhe vom Widerrüst bis zum Boden	3 —	„ —	„ —
— vom Kreuz bis zum Boden	3 —	1 —	„ —
Umfang des Halses in der Mitte	1 —	9 —	„ —
— des Vorderleibes	3 —	5 —	„ —
— des Hinterleibes	3 —	6 —	„ —
Länge der *Scapula* (¹)	0 —	9½ —	„ —
Breite derselben	0 —	5 —	„ —
Höhe der *Spina*	„ —	1 —	„ —
Länge des Oberarmbeins	„ —	8 —	„ —
— des Unterarmbeins vom Ellenbogen an	„ —	12 —	„ —
— der Röhre vom Handgelenk bis zur Fessel	„ —	7 —	„ —
— der Fessel	„ —	3 —	4 —
— der Vorderhufe oben	„ —	3 —	„ —
— — — unten	„ —	4 —	3 —

(¹) Die Maafse sind von den, in der übersandten Haut steckenden Knochen genommen.

Länge der Afterhufe	„ Fufs	1 Zoll	„ Linien.
Breite derselben	„ —	„ —	9 —
Länge des Oberschenkelbeins	„ —	10 —	„ —
— der Schiene vom Knie bis zum Hacken	„ —	11 —	6 —
— der Röhre vom Hacken bis zur Fessel	„ —	12 —	„ —
— der Fessel	„ —	3 —	„ —
— der Hinterhufe oben	„ —	2 —	3 —
— — — unten	„ —	3 —	4 —
— Afterhufe	„ —	„ —	9 —
Breite derselben	„ —	1 —	„ —

Die Beschaffenheit der Hörner an diesem Thier führt auf die sehr nahe liegende Vermuthung, es sei der *Strepsiceros* des Plinius, der allein unter den alten Schriftstellern diesen Namen gebraucht und aus dessen Angaben man schon sehr vielerlei andre Thiere dafür gehalten hat. In der oben (S. 202) angeführten Stelle, nennt Plinius nämlich auch den *Strepsiceros* unter den wilden Ziegen, die jenseits des (mittelländischen) Meeres zu Hause gehören. An einer andern Stelle, wo er von der Verschiedenheit der Hornbildung spricht ([1]), bezeichnet er den *Strepsiceros* genauer, und obgleich nur mit wenigen Worten, doch so deutlich, dafs man sich billig wundern mufs, wie seine Worte so arg haben gemisdeutet werden können. Wäre unser Thier früher bekannt gewesen, so hätte es keinem einfallen können, das kretische Schaf oder die indische *Cervicapra*, oder das südafricanische *Kudu* eins um das andre für den *Strepsiceros* des Plinius zu halten; denn seine Ausdrücke, die durch die bestimmten Gegensätze, in denen sie gebraucht werden, ganz den Werth von Kunstausdrücken gewinnen, lassen sich vollkom-

---

([1]) *Lib.* XI, *cap.* 37. *Cornua multis quidem — variis data sunt modis. Nec alibi maior naturae lascivia. Sparsit haec in ramos, ut cervorum. Aliis simplicia tribuit ut in eodem genere subulonibus ex argumento dictis. Aliorum finxit in palmas, digitosque emisit ex iis, unde platycerotas vocant. Dedit ramosa capreis sed parva. — Convoluta in anfractum arietum generi, ceu caestus daret; infesta tauris. — Rupicapris in dorsum adunca, damis in adversum. Erecta autem, rugarumque ambitu contorta et in laeve fastigium exacuta (ut lyras diceres) Strepsiceroti, quem Addacem Africa appellat.*

men als Diagnose unseres Thieres anwenden: *Cornua erecta, rugarum ambitu contorta et in laeve fastigium exacuta.* Beim kretischen Schaf nämlich sind sie nicht *erecta*, bei der *Cervicapra* fehlt das *laeve fastigium*, da sie bis an die Spitze geringelt sind, und am *Kudu* fehlen die Runzeln und die gerade Zuspitzung. Obgleich wir also keine genauere Angabe von den übrigen Merkmalen des *Strepsiceros* haben, stehe ich doch nicht an, sowohl wegen des Fundortes, als wegen der Merkmale, die besser als hier nirgend zutreffen können, zu glauben, Plinius habe das hier beschriebene Thier mit dem Namen *Strepsiceros* gemeint. Doch läfst die Frage allerdings noch eine nähere Erörterung zu. Denn obgleich der Name bei Niemand, aufser dem Plinius vorkommt, so finden sich doch noch auch sonst Hindeutungen auf ähnliche Thiere, z. B. beim Oppian ([1]):

> *Αἰγῶν δ' αὖτε πέλει προβάτων τε πανάγρια φῦλα·*
> *οὐ πολλῷ τούτων οἴων λασίων τε χιμαιρῶν*
> *μείζονες, ἀλλὰ θέειν κραιπνοὶ σθεναροί τε μάχεσθαι*
> *στρεπτοῖσι κεφαλῆφι κορυσσόμενοι κεράεσσι.*

wo nur freilich sich eben nicht mehr beweisen läfst, als Oppian habe nicht das kretische Schaf damit gemeint, da er hier von wilden Arten redet und eines zahmen kretischen Schafes später (v. 377.) ausführlicher gedenkt, das er als gelbroth von Farbe, grobhaarig und vierhörnig beschreibt. Man sieht, der Dichter hat kein sehr bestimmtes Bild von diesen Thieren mit gewundenen Hörnern, und es würde kaum der Mühe werth sein, diese Stelle anzuführen, wenn sie nicht später zur Erklärung des *Strepsiceros* beim Plinius so oft mit zu Hülfe genommen wäre.

Der Erste der eine solche Deutung versuchte, war Pierre Bellon, als er auf seiner Reise im Orient (von 1546-49) auf der Insel Kreta zahme Schafe mit gewundenen Hörnern angetroffen hatte. Die Hirten am Berge Ida nannten diese *Striphoceri*, wodurch Bellon zuerst verleitet worden sein mag, sie für einerlei mit dem *Strepsiceros* zu halten. Seine Beschreibung und ein beigefügter Holzschnitt, die von Gefsner, Aldrovand und vielen andern wiederholt sind, beweisen indessen deut-

---

([1]) Κυνηγ. II, v. 326.

lich, dafs dies kretische Thier nicht das unsrige gewesen sein könne; ja es wird daraus sehr wahrscheinlich, dafs Bellon noch etwas ganz andres vor sich gehabt habe, als was seit Brissons Zeit das kretische Schaf genannt ist ([1]). Indessen giebt Gefsner, nachdem er in seiner *Historia animalium* (I, *p.* 323) den *Strepsiceros* mit wenigen Worten abgehandelt, in den *Iconibus animalium quadrupedum* (*p.* 37.), das vergröfserte Bellonsche Bild nebst den Hauptsachen der Beschreibung, fügt noch die Stelle aus dem Plinius bei, und redet nun von einer andern Art *Strepsiceros*, von deren Gehörn ihm Joh. Cajus Abbildung und Beschreibung aus England übersandt hatte und die er ausführlich mittheilt. Dieser *Strepsiceros* des Cajus (wie er seitdem genannt wird) ist kein andrer, als der ächte des Plinius, und die ganze Stelle um so wichtiger, als es beinahe die einzige Notiz von dieser Antilope ist, die, bis auf die oben von mir gegebene Beschreibung derselben, sich in irgend einem Buche vorfindet. Denn, ob das einzelne Horn, nach dessen Kenntnifs Herrmann ([2]) seine *Antilope torticornis* aufstellte, für das des ächten *Strepsiceros* zu halten sei, läfst sich aus der kurzen Beschreibung nicht mit Sicherheit abnehmen. Aber wahrscheinlich wird es allerdings aus der Gleichheit der angegebenen Verhältnisse. An der Uebereinstimmung jenes *Strepsiceros* des Cajus mit unserm *Addax*, läfst sich dagegen auf keine Weise zweifeln, da nicht nur die Abbildung des

---

([1]) Es heifst nämlich ausdrücklich, die Hörner seien nicht *inflexa nec contorta, sed omnino erecta, ut Unicornu, in ambitu canaliculata,* aber am Ende des Capitels: *cornua recta canaliculata, et cochleae in modum contorta.* Die Abbildung von welcher Bellon ausdrücklich versichert, dafs sie nicht von einem andern Autor entlehnt, also von ihm nach der Natur gegeben sei, stellt an einer gewöhnlichen Schafgestalt die Hörner gerade, dick, stumpf, kürzer als der Kopf und schraubenförmig dar. Ganz willkührlich setzt Brisson seiner Diagnose die Nebenbestimmung hinzu, die Hörner seien spiralförmig gewunden, womit er vielleicht nicht mehr als eben das Schraubenförmige gemeint hat. Aber dieser Ausdruck ist Ursache geworden, dafs man das ungarische Schaf (den bekannten Zackelbock), für einerlei mit dem kretischen Schaf gehalten, was aber immer nur nachgesprochen, nirgends erwiesen ist, denn meines Wissens hat seit Bellon Niemand aus eigner Ansicht von der Schafrace am Berge Ida berichtet. Eine der Bellonschen sehr ähnliche Darstellung geradhörniger Schafe findet sich in der *Description de l'Egypte Antiquités, Vol.* IV, *tab.* 68. *f.* 13.

([2]) *Observationes zoologicae p.* 87.

Gehörns vollkommen zutrifft, sondern auch die von Cajus angegebenen Maafse dieselben sind, die ich oben von dem Gehörn des *Addax* gegeben habe.

Nichtsdestoweniger hat eben diese Stelle zu neuer Misdeutung Veranlassung gegeben. Denn als Kämpfer (der bis 1694 reiste) die erste Nachricht von der schönen indischen Antilope gegeben ([1]), die er *Capricerva* und *Cervicapra* nennt und die nachmals unter letzterem Namen in die Systeme eingeführt worden, glaubten Alle darin den *Strepsiceros Caii* zu erkennen und es ward Gebrauch, sie gemeinschaftlich zu den Namen zu citiren, die man für die unbekannten indischen wilden Ziegen bereit hatte. Man darf nur die unterschiedenen Ausgaben des Linné'schen Natursystems unter einander vergleichen, um sich zu überzeugen, wie schwankend und unsicher das Urtheil über diesen Gegenstand damals gewesen und wie wenig es der Mühe werth sein könne, die vielfachen Irrthümer und ihre Ursachen noch genauer zu erörtern. Genug die *Cervicapra* ward mit dem *Strepsiceros* verwechselt, weil man auf die Gestalt und die Vertheilung der Ringe an dem Gehörn zu wenig achtete und entweder den Beschreibungen und Abbildungen der beiden alten Reisenden zu wenig Genauigkeit zutraute, oder auch selbst nicht genau genug in der Vergleichung ihrer ganz bestimmten und richtigen Ausdrücke war. In diesen Fehler verfällt auch Buffon, indem er ein einzelnes Horn unsers ächten *Strepsiceros*, das sich im Naturalienkabinet des Königs von Frankreich vorfand, neben dem Gehörn der indischen *Cervicapra* beschreibt und abbildet ([2]) und es als eine blofs zufällige Abweichung betrachtet, ohne der ganz übereinstimmenden Abbildung bei Gefsner daneben zu erwähnen. Buffon kennt auch schon das Gehörn des capischen *Kudu* (irrig von ihm *Condoma* genannt) ([3]), und hält nun dieses aus vielen jetzt leicht zu widerlegenden Gründen für dem *Strepsiceros* des Cajus angehörig ([4]), als wenn es unmöglich noch eine dritte von beiden unterschiedene Art mehr geben könnte.

([1]) *Amoenitates exoticae p.* 398. *et p.* 407. *f.* 1.

([2]) *Hist. nat.* XII, *p.* 275. *tab.* 36. *f.* 2.

([3]) Man vergleiche Pallas *Spicil. zool. fasc.* XII, *p.* 67.

([4]) *Hist. nat.* XII, *p.* 301. *tab.* 39.

So betrachtet es nun auch Pallas, als er ein vollständiges Fell dieses südafricanischen Thieres bekommt und danach eine ausführlichere Beschreibung desselben (a. a. O.) entwirft. Er macht dabei den Fehler, dafs er dasselbe mit dem Namen *Ant. Strepsiceros* belegt, der ihm jetzt nicht mehr zu nehmen ist, aber vorsichtiger als Buffon beginnt er seine Beschreibung sogleich mit dem Zweifel, sein *Strepsiceros* sei wohl nicht der des Plinius, doch passe auf keine andre Antilopen-Art die Bedeutung des Namens besser als auf diese. In der systematischen Zusammenstellung wird dann von ihm nach Buffonscher Weise der *Strepsiceros* des Cajus bei dem capischen *Kudu* citirt und die Beschreibung des Plinius auf die indische Antilope angewendet, statt dafs eine genauere Vergleichung sämmtlicher Angaben hier schon hätte lehren können, dafs es noch eine eigene von beiden unterschiedene Art gebe, auf welche die Worte des Plinius besser zuträfen, als auf eine der beiden.

Alle diese Irrthümer sind nun durch das erste vollständige Exemplar, das seit den Zeiten der römischen Imperatoren nach Europa gekommen ist, hinreichend berichtigt. Aber es ergiebt sich daraus noch ein andrer, für die Alterthumsforscher wichtiger Aufschlufs. So vergeblich ich mich nämlich auch bemüht habe, in der reichen Sammlung alt-ägyptischer bildlicher Darstellungen, welche die Königliche Bibliothek besitzt, eine ganze Abbildung des *Strepsiceros* zu finden, wie sie vom *Oryx, Tragelaphus* und der *Dorcas* so häufig vorkommt, so vielfältig stofse ich in diesen Abbildungen auf die Vorstellung der Hörner. Die sogenannten Bockshörner nämlich, die Hörner des Mendes, die auf den Häuptern des Ammon, Phre, Theuth, Mars, Osiris, Horus und Typhon so häufig erscheinen, auch wohl Priester und Könige zieren [1], sind unläugbar nichts andres als die Hörner unsers *Strepsiceros* oder *Addax*. Sie erscheinen immer deutlich gewunden, nie geschweift, wie die Hörner des europäischen Ziegenbocks, immer in dem richtigen Verhältnifs ihrer Gröfse zur Menschengestalt; nur ist ihre Richtung verändert, sie sind mit den Wurzeln gegen einander in eine gerade Linie gestellt, das eine nach hinten, das andere nach vorn ge-

---

[1] Vergl. Tölken, vom Tempel des Jupiter-Ammon, S. 120.

wendet, was entweder geschehn sein mag, damit die Kronen und andere symbolische Zeichen darüber Raum hätten, oder weil auch im altägyptischen Cultus die mit den Wurzeln zusammenverbundnen Antilopenhörner Waffen und Attribute der Priester waren, wie in Indien. Dafs diese Richtung nicht die natürliche sein könne, stellt sich leicht dar, und selbst wenn man sie für Bockshörner halten will, mufs man eine veränderte Stellung derselben zugeben und annehmen. Die auf der zweiten Tafel unter der Abbildung des *Addax* hinzugefügten Götterbilder mögen zur Versinnlichung dieser Bemerkungen dienen.

Da die Griechen den Mendes, Pan nennen, so möchte es die Untersuchung der Alterthumsforscher verdienen, ob des letztern Gestalt nicht vielmehr von unserm *Addax* als vom Ziegenbock entlehnt, scheinen dürfe. Mir kommt es wenigstens vor, als hätten die Bilder des Pan mehr Aehnlichkeit mit jenem; besonders passen die plumpen breiten Hufe, die schiefe Stellung der Augen, die behaarte Stirn, und nur dafs der arkadische Gott die eigentlichen Bockshörner trägt, ist widerstreitend. Sollte nicht vielleicht in dem Bilde dieses jüngsten aller Götter der uralte Mendes wiederholt und seine Gestaltung nur der in Griechenland bekannteren Form des Bockes näher geführt worden sein?

Auch der Apis trägt zuweilen neben seinen oder den Widderhörnern noch die des *Addax*. Auf einer der Papyrusrollen unsrer Königlichen Bibliothek ist ein solches Bild des Apis in bunten Farben, an welchem dabei zugleich der Kopf schmaler, die Hufe breiter wie gewöhnlich vorkommen, und wo die Gestalt des Stieres mit der des *Addax* gleichsam verschmolzen erscheint.

Wir besitzen nun auch die Jungen oder Kälber dieser merkwürdigen Art, eins von etwa vier, das andere von viertehalb Fufs Länge. Man mufs sie sehr genau betrachten, um in ihnen den *Strepsiceros* zu erkennen, und wir haben sie, bevor die Felle ausgestopft waren, eine Zeitlang für eine eigne Art angesehn. Indessen nämlich das Haar viel weicher und feiner, die weifse Farbe reiner, und der Körperbau schlanker und zierlicher ist, zeigen besonders die Hörner grofse Verschiedenheit. Sie sind völlig gerade, an dem gröfseren 9, an dem kleineren $7\frac{1}{2}$ Zoll lang, ohne Ringe und Runzeln, doch keinesweges glatt, sondern unregelmäfsig hin und wieder aufgetrieben, und bestehen aus einer weicheren Hornmasse,

die ein blättriges Gefüge und wenig Glanz zeigt; an ihrem Ende erscheinen sie auffallend stumpf, verlaufen sich übrigens fast parallel und sind an ihren Spitzen nur 5 bis 6 Zoll auseinander. Unsre Exemplare scheinen einige Monate alt zu sein und die Milchzähne stehn vollständig im Unterkiefer. Die diagnostischen Art-Kennzeichen: der dunkle Scheitelfleck, der Haarwirbel im Nacken, von welchem die Mähne ausgeht, der Kehlschopf, die aufgetriebenen Gelenke und die breiten Hufe, verrathen deutlich genug die Abstammung vom *Addax*, von welchem sie nur die Spiefser sind. Sie haben Werth für die Naturgeschichte, insofern sie das frühe Entstehn des Gehörns bei diesen Thieren beweisen und von dessen Anfangs unvollkommner Gestaltung einen Begriff geben, aber sie scheinen mir auch nicht gleichgültig für die Alterthumskunde. Solche Thiere nämlich kommen auch in den ägyptischen Bildwerken vor und unter Umständen, die es interessant machen können, in ihnen die Jungen andrer bedeutungsvoller Thiere wiederzufinden. So stellt z. B. die Bembinische Isistafel (in der zweiten Figur der ersten Tafel bei Pignori) den Horus vor, wie er ein ähnliches Thier opfert. Jablonsky hält es für den *Oryx*, doch ist es dafür viel zu klein im Verhältnifs zur Gestalt des Gottes. Es ist offenbar ein solches Antilopenkalb, und zwar wahrscheinlicher vom *Addax* als vom *Oryx*, weil dieser als unrein wohl nicht zum Opferthier gewählt sein mag. Der Horus hält ein Instrument in der Rechten, das Jablonsky wieder für ein Oryxhorn ansieht, es soll aber wohl unstreitig ein langes, schmales Messer vorstellen, wie man aus ähnlichen Darstellungen von Opfer-Scenen in der *Descr. de l'Egypte* sieht, wo es deutlicher die Form des Opfermessers hat. Ueberall aber sind es junge Thiere, die geopfert werden, zum Theil noch ohne Hörner und statt derselben mit dem bekannten Symbol der doppelten Straufsfeder geschmückt [1]. Es ist wenigstens wichtig zu wissen, dafs man sich der Hörner wegen die Opferthiere nicht als ausgewachsen zu denken braucht, noch dabei auf ganz neue und unbekannte Thiere zu muthmafsen hat, wenn ihre Gröfse und die Gestalt der Hörner von Bekanntem abweicht. Hätte Salmasius diese Antilopenkälber gekannt, sie würden ihm sehr willkommen gewesen

---

[1] Man vergleiche *Descr. de l'Egypte, Vol.* I. *tab.* 59. *f.* 5.

sein, um seine Meinung zu unterstützen, daſs der *Subulo* des Plinius ([1]) etwas vom Hirsch-Spieſser verschiedenes sei.

Der Widerspruch den diese Behauptung gefunden (von Harduin und anderen), hat dem *Subulo* eine gröſsere Celebrität verschafft, als er verdient, da Plinius nichts weiter von ihm sagt, als, er habe gerade Hörner, da also wenig darauf ankommen kann, ob man dies von einem jungen Hirsch, oder von einem unbekannten, sonst durch gar nichts bezeichneten Thier wisse. Unter den vielen Worterklärungen des *Subulo,* bei welchem Plinius wohl offenbar nur an die Pfrieme (*Subula*) denkt (*subulones ex argumento dicti*), kommen die gelehrten Commentatoren auch darauf, daſs *Subulo* tuscisch ein Pfeifer geheiſsen haben soll, etwa weil man aus den Röhren-Knochen solcher Thiere, Pfeifen zu machen verstand, wozu sich hier die geraden, hohlen Hörner wohl eben so gut geeignet hätten ([2]). Mich wundert aber, daſs keiner daran gedacht hat, den *Subulo* vom *Subus* herzuleiten, den Oppian ([3]), als ein glattes, weiſses Thier mit bräunlichem Kopf und starken Hörnern über der breiten Stirn beschreibt, indessen er nachher noch fabelhaft Klingendes von seinem Amphibienleben und seiner Befreundung mit den Fischen hinzufügt. Das muſs wenigstens ein mit unserm *Addax* nahe verwandtes Thier und im jugendlichen Zustand, kaum von dessen Kalb zu unterscheiden gewesen sein. Ich wüſste aber kaum eine Form eigentlicher Hörner, die mit dem stumpfrunden Geweih des Spieſsers mehr übereinstimmte, als die dieser Kälber, daher eine gleiche Benennung oder eine Uebertragung des Namens mir wohl denkbar vorkommt.

Es ist endlich noch zu bemerken, daſs *Ant. Oryx* und *Addax* zu einer und derselben natürlichen Sippschaft in dieser Gattung gehören. Beide haben dieselbe Körperbildung, kleine Thränensäcke, keine Kniebüschel noch Leistengruben, auch in der Gestalt und Länge des Schwan-

---

([1]) Nämlich in der angeführten Stelle *Lib.* XI, *cap.* 37.

([2]) Eine Anfrage, die ich wegen dieses Gegenstandes an meinen Gönner, den Herrn Hofrath Böttiger in Dresden, richtete, veranlaſste dessen Bemerkungen zu den *Subulonen* des Plinius, in der Amalthea (3r Band, S. 191). Sie kam mir zu spät zu, um sie noch für diese Abhandlung benutzen zu können. Einige Bemerkungen in Betreff dieses Punktes mögen nachher als Anhang folgen.

([3]) Κυνηγ. *Lib.* II, *vs.* 382-392.

zes, der Beschaffenheit des Haares, selbst der Farbe stimmen sie überein und sind endlich beide, sowohl im weiblichen als männlichen Geschlecht, gehörnt ([1]).

III. Antilope Dama Pall.

Tab. III. Männchen und Junges. Tab. IV. Weibchen und Junges.

Plinius führt die *Dama* unter den africanischen wilden Ziegen ([2]) an, und bezeichnet sie ([3]) sehr deutlich im Gegensatz gegen die Gemse: *Cornua rupicapris in dorsum adunca, damis in adversum.* Es ist also zu tadeln, daſs man später den Dammhirsch mit diesem Namen bezeichnete, der bei den Alten (auch bei Plinius) immer *Platyceros* und *Euryceros* heiſst.

Ein Thier, auf welches das von Plinius angegebene charakteristische Merkmal paſste und auf welches man auch die andern gelegentlichen Erwähnungen der *Dama* bei Horaz, Virgil und Martial beziehen zu können schien, ward erst im Jahr 1750 von Adanson am Senegal entdeckt und nach der von ihm gegebnen Abbildung und Beschreibung von Buffon ([4]) zur allgemeinen Kunde gebracht. Adanson nannte es *Nanguer*, und Buffon fügt hinzu, daſs dies die *Dama* des Plinius sein müsse, weshalb denn auch Pallas es als *Antilope Dama* in sein systematisches Verzeichniſs der Antilopen aufnahm. Seit dieser Zeit ist weiter nichts davon bekannt geworden und selbst die neueren naturhistorischen Werke (z. B. Desmarest's *Mammalogie* von 1823) geben nur Buffon's Beschreibung wieder. Unsre Exemplare sind also die ersten, aus denen eine bessere Kenntniſs dieser merkwürdigen Art hervorgeht.

Zuerst ist es nöthig zu bemerken, daſs der neue Fundort dieser Art, Nubien, indem er eine allgemeine Verbreitung des *Nanguer* durch

---

([1]) Wie sich die neulich von Herrn Otto beschriebene *Ant. suturosa* zu dem *Addax* verhalte, wird in dem Anhange erörtert werden.

([2]) *Lib.* VIII, *cap.* 53.

([3]) *Lib.* XI, *cap.* 37.

([4]) *Hist. nat. Vol.* XII, *pag.* 213. *tab.* 33. *f.* 1. und *tab.* 34.

ganz Nordafrica beweist, Buffon's Vermuthung, es sei die *Dama* des Plinius, allerdings bestätigt, denn nur aus dieser Gegend, nicht vom Senegal, konnten die Römer sie kennen, und auch hier ist keine andre Art anzutreffen, auf welche jene wenigen Worte des alten Natur-Beschreibers besser zuträfen. Aber sehr unvollständig ist trotz der genauen Beschreibung die Kenntnifs, die uns Adanson und Buffon von diesem Thier gegeben. Denn der *Nanguer* ist nur ein halb erwachsenes Junges von der muthmafslichen *Dama*, an welchem eben erst die Spitze des Gehörns hervorgebrochen ist. Daher sind die Hörner so kurz und glatt und mit so wenigen Ringen umgeben, daher an der Wurzel noch so weit hinauf mit Haut und Haar umgeben. Das erwachsene Thier ist aber gar anders gestaltet. Es hat fast die doppelte Gröfse, nämlich 5 Fufs und 4 Zoll ganze Länge, bei einer Höhe von 3 Fufs, einen ungemein dünnen und langen Hals, von braunrother Farbe mit dem charakteristischen weifsen Fleck des *Nanguer* auf der Mitte desselben. Auf dem Widerrüst steht ein Haarwirbel, von welchem aus das Haar gegen den Nacken in einer Strecke von 8 Zoll in verkehrter Richtung hinaufwächst; die rothbraune Farbe des Rückens ist nur etwas heller als die des Halses, sie nimmt die Schultergegend und auf dem Rücken eine Breite von 8 bis 9 Zoll ein und reicht etwa bis auf $\frac{3}{4}$ Fufs vor der Schwanzwurzel hin. Diese Gegend des Hinterrückens, so wie die Seiten des Leibes, die Brust und die Beine, mit Ausnahme der Vorderseiten der Läufe, sind von dem reinsten Weifs. Diese Farbe hat auch der ganze Kopf und Oberhals nebst den schwarz gerandeten Ohren, indessen bei den Jungen die Stirn bis etwa 4 Zoll vor den Hörnern dunkelbraun erscheint, was sich allmählig mit zunehmender Ausbildung des Gehörns verliert. Der Schwanz ist 9 Zoll lang und erscheint auffallend dünn, weil er auf der ganzen Unterseite nackt und nur oben mit kurzen, abstehenden Haaren bedeckt ist, von welchen die äufsersten an Länge nur um weniges die mittleren übertreffen. Am Handwurzelgelenk, dem sogenannten Vorderknie, stehn dicke Büschel von längeren, von den Seiten gegen die Mitte gerichteten Haaren, zwischen welchen sich ein Ohrenschmalzähnliches *Cerumen* in Menge absondert. Die Haut ist hier schwammig und aufgetrieben und ihre Querdurch-

schnitte zeigen unter dem Mikroskop ein sehr zelliges Gefüge ([1]). Die Hufe sind von der zierlichsten Beschaffenheit, sehr schmal, platt von den Seiten zusammengedrückt, kurz, doch vorn scharfwinklig zugespitzt und vom feinsten, glänzend schwarzen Horn. Die Afterhufe sind ausnehmend klein und platt, besonders die vorderen, die nur in die Haut eingewachsenen kleinen Hornschwielen ähnlich sehn.

Am mehrsten aber unterscheiden sich die erwachsenen Exemplare von dem *Nanguer* des Buffon durch das Gehörn, das wohl die zugleich zierlichste und kräftigste Bildung hat, die die schöngehörnte Gattung der Antilopen aufweisen kann. Es erhebt sich von der Stirn in einem verhältnifsmäfsig dicken, starkgeringelten Stamm, der sich gleich von der Wurzel nach hinten und aufsen biegt, und allmählig dünner, mit immer flacheren und weiter von einander abstehenden Ringen umgeben, dem Umrifs des Kopfes in mäfsigem Abstand folgt. Wo die Ringe ganz aufhören, krümmen sich plötzlich beide Hörner ihren Wurzeln entgegen nach vorn und innen, und strecken die schön geglätteten scharfen Spitzen vorwärts.

Auf der vorderen Seite nach der Krümmung gemessen, haben sie $12\frac{1}{2}$ Zoll Länge. Die äufserste Spitze selbst ist in gerader Richtung nur 9 Zoll von der Wurzel entfernt. An dieser haben sie $4\frac{1}{2}$ Zoll Umfang, in der Mitte $3\frac{1}{2}$ Zoll, in der Gegend der letzten Krümmung nur $2\frac{1}{2}$ Zoll. Dies sind die Maafse des Männchens. Am Weibchen ist das Gehörn kaum kürzer, aber viel schlanker und dünner und mit weniger auffallend zurückgebogenen Spitzen. Die Zahl der Ringe ist an beiden 18 bis 19, doch sind sie am Männchen ausgewirkter und tiefer.

Genauere Ausmessung.

1) Des Männchens.

Länge des Kopfes bis zwischen das Gehörn......	„	Fufs	8	Zoll.
Von da bis zwischen die Ohren...............	„	—	4	—
Von da bis zum Widerrüst.................	1	—	8	—
Von da bis zur Schwanzwurzel...............	2	—	8	—

([1]) Wahrscheinlich finden ähnliche Absonderungen bei allen Antilopen mit Kniebüscheln Statt.

Ganze Länge	5	Fufs	4	Zoll.
Umfang des Kopfes durch die Augen	1	—	5	—
— des Halses	„	—	11½	—
— des Vorderleibes	3	—	„	—
— des Hinterleibes	2	—	9½	—
Länge des Horns auf der Krümmung	„	—	12½	—
Entfernung der Spitze von der Wurzel	„	—	9	—
Abstand beider Hörner an der Wurzel	„	—	1½	—
— beider Hörner in der Gegend der stärksten Krümmung	„	—	8½	—
— der beiden Spitzen von einander	„	—	7	—
Länge der Ohren	„	—	6	—
— des Schwanzes	„	—	9	—
Vordere Höhe	3	—	„	—
Hintere Höhe	3	—	1	—
Länge des Unterarms	1	—	1	—
— des Laufes	„	—	10	—
— der Fessel	„	—	3	—
— der Hufe (unten)	„	—	1½	—
— des Unterschenkels	1	—	2	—
— des Laufes	1	—	2	—
— der Fessel	„	—	3	—

2) Des Weibchens.

Länge des Kopfes bis zwischen die Hörner	„	Fufs	7½	Zoll.
Von da bis zwischen die Ohren	„	—	4	—
Von da bis zum Widerrüst	1	—	7	—
Von da bis zur Schwanzwurzel	2	—	7½	—
Ganze Länge	5	—	2	—
Umfang des Kopfes	1	—	3	—
— des Halses	1	—	„	—
— des Vorderleibes	2	—	8	—
— des Hinterleibes	2	—	8½	—
Länge des Gehörns auf der Krümmung	1	—	„	—
Entfernung der Spitze von der Wurzel	„	—	10½	—

Entfernung der Spitzen von einander	„ Fuſs	$6\frac{1}{2}$ Zoll.
Länge der Ohren	„ —	6 —
— des Schwanzes	„ —	8 —

Die Längen der Extremitäten um ein Geringes kleiner als beim Männchen.

So wie es nach Obigem nur aus der zur Zeit noch fortbestehenden Unbekanntschaft mit einem Thier, von ähnlicher Gestalt der Hörner, gerechtfertigt werden kann, wenn man dies Thier für die *Dama* des Plinius zu halten fortfährt, so ist es nun freilich auch gar wohl möglich, daſs unter dem *Pygargus* der alten Schriftsteller wiederum nur dies nämliche Thier zu verstehen sei. Unter den nordafricanischen Antilopen ist mir weiter keine bekannt, die Anspruch auf den Namen *Pygargus* machen könnte, und eine nähere Beschreibung derselben fehlt uns. Daſs aber *Pygargus* und *Dama* bei Plinius etwas unterschiedenes bedeuten, wird freilich daraus wahrscheinlich, daſs er beide einander entgegensetzt, wenigstens sie neben einander nennt. Auf jeden Fall ist indessen gewiſs mit Unrecht der Name *Pygargus* auf den südafricanischen *Bleſsbock* angewendet, der selbst dort einen sehr eingeschränkten Standort einnimmt und sich wenigstens nicht weit nach Norden verbreitet.

Nur selten erscheint in antiken Darstellungen eine Thiergestalt, in der man unsre *Dama* wieder erkennen könnte. Man darf wenigstens wohl nicht jede Antilope mit langem, dünnem Hals dafür halten, da dieses Kennzeichen auch zu oft einem Fehler des darstellenden Künstlers zugeschrieben werden muſs, wenn sonst Gründe zum Verdacht geringerer Treue vorhanden sind. Am unverkennbarsten erscheint die *Dama* in einem antiken Cameo aus der Sammlung des Herrn Grafen von Einsiedel, von welchem Caylus schon vor sechszig Jahren eine Abbildung lieferte ([1]), den mir aber Herr Hofrath Böttiger in einer besseren Zeichnung mitgetheilt hat. Hier ist der *Orpheus*, von vielen Thieren umgeben, vorgestellt, die seinem Spiel zu lauschen scheinen. Die hinter dem Kopf des *Orpheus* stehende Figur, unmittelbar über

---

([1]) *Recueil d'Antiquités, Tom.* IV, *Pl.* 48. *fig.* 1.

dem Pferd (es ist die fünfte vom Löwen aufwärts gezählt), hat in ihrem Verhältnifs zu den übrigen Thieren, in den Umrissen des Kopfes, in dem Schwung des Gehörns und der Länge des Halses soviel Uebereinstimmendes mit der Gestalt unsrer *Dama*, dafs wohl kaum ein Zweifel übrig bleiben kann.

Noch kann ich nicht mit Stillschweigen übergehn, dafs der Name, den Plinius diesem Thier giebt, auch bei arabischen Schriftstellern ähnlich klingend vorkommt. Unter den drei unterschiedenen Arten von Gazellen, welche der arabische Schriftsteller Damir anführt, ist eine von weifser Farbe mit schneeweifsem Bauch und langem Hals, (also höchst wahrscheinlich die *Dama*) und diese heifst *Adam* [1]. In den handschriftlichen Nachrichten, welche die Herren Hemprich und Ehrenberg uns über die nubischen Thiere mitgetheilt haben, lautet der arabische Name der *Dama*: *Addra*. Man könnte auf ein Mifsverständnifs muthmafsen, wenn der Name *Adam*, der sonst bekanntlich auch im Arabischen Mensch bedeutet, nicht auch bei den Lexicographen in ähnlicher Bedeutung vorkäme [2].

IV. ANTILOPE DORCAS Pall. Tab. V.

Eine der zierlichsten und sowohl von Seiten der Farbe als des Gehörns, schönsten Arten der Gattung und zugleich die am weitesten im nördlichen Africa verbreitete und in den zahlreichsten Heerden anzutreffende Art, daher auch am häufigsten, sowohl lebend als todt nach Europa gebracht, in allen Werken deutlich beschrieben und von Linné zuerst richtig mit dem Namen *Dorcas* in Beziehung auf die Hauptstelle bei Aelian [3] in das System eingeführt. Die Beschreibung, welche Aelian von seiner *Dorcas* giebt, ist so deutlich und vollständig, dafs sie keine Misdeutung erlaubt. Was Plinius [4] bei den Thieren die-

---

(1) Bochart *Hierozoïc. Lib.* III. *cap.* 27, p. 962.

(2) Z. B. Bei Giggejus, Meninsky, Richardson, Wilkins. Auch *Adra* wird bei diesen durch: *weifse Ziege* übersetzt.

(3) *De Nat. anim. Lib.* XIV, *cap.* 14.

(4) *Hist. anim. Lib.* VIII, *cap.* 58. *Lib.* XXVIII, *cap.* 11. *et Lib.* XXIX *et* XXX.

ses Namens anführt, widerspricht wenigstens nicht der allgemein angenommenen Vermuthung, dafs er dasselbe darunter verstehe; es bezieht sich übrigens, was er sagt, hauptsächlich nur auf ihr Vaterland, als welches er auch ganz richtig Klein-Asien angiebt und die schon im Namen ausgedrückte Eigenschaft des hellsehenden und klaren Auges, weshalb denn vorzüglich in den letzten Büchern unter den Heilmitteln gegen Augenkrankheiten u. s. w. häufig der Dorcaden gedacht wird. Was andere Schriftsteller unter den ähnlich klingenden Namen ἴορκος, δόρκος, δορκῶν, δορκάδιον und δὸρξ verstehn, ist nicht leicht auszumitteln. Die Mehrsten mögen sich eben nichts andres als die *Dorcas* dabei denken, doch wird auch zuweilen bestimmt Unterschiedenes darunter verstanden. So ist der ἴορκος des Oppian (*Cyneg.* II, *vs.* 296.) sehr deutlich der den Römern wohlbekannte *Axis* oder Gangeshirsch (man sehe Plinius *Lib.* VIII, *cap.* 31.), den Oppian auch unter den Hirschen aufführt, Schneiders Uebersetzung durch *Dama* also falsch, indem weder die *Dama* des Plinius, noch der unmittelbar vorher beschriebene Dammhirsch (*Euryceros*) darunter verstanden werden kann. Weiterhin (*vs.* 315.) meint Oppian mit δόρκος unleugbar das Reh, indem er sagt, es sei die Art muthwilliger (ὠκυτάτων) Thiere, die Allen nach Gestalt und Gröfse hinreichend bekannt, keiner Beschreibung bedürfe. Ueberall stofst man auch sonst auf Verwechselung der *Dorcas* mit dem Reh, besonders in den Uebersetzungen der Bibelstellen, die dieses Thieres gedenken. Zuweilen scheint auch sogar δόρκων und δράκων verwechselt zu werden, und in dieser Beziehung ist es interessant, dafs bei Plinius zweimal unter den abergläubigen Heilmitteln das Herz und der Schwanz des Drachen in der Haut der *Dorcas* mit Hirschsehnen auf den leidenden Theil zu befestigen, vorkommen [1]. Das Uebrige ist bei Buffon (unter dem Abschnitt *Gazelle*) und bei Pallas zu finden, welche beide noch die schwächer gehörnten Weibchen als besondre Arten unter den Namen

---

[1] Sehr deutlich ist die Verwechselung von δόρκων und δράκων in der von Bochart (*Lib.* III. *cap.* XXVI, *p.* 933.) angeführten Nachricht des Philostorgius (*Lib.* III, *cap.* 11.), über das von demselben in Constantinopel gesehene Einhorn, welches den Kopf eines δράκων gehabt haben soll.

Kevella und *Corinna* aufführen, was ich schon vor zwölf Jahren berichtigt habe und seitdem allgemein als irrig angenommen worden ist.

Unsere Reisende haben uns achtzehn Exemplare dieser Art zugeschickt, was beweist, dafs sie in Nubien sehr häufig und in grofsen Gesellschaften zu finden sein mufs. Es sind Männchen, Weibchen und Junge. Letztere sind aus drei unterschiedenen Zeiten des Jugendlebens in der Abbildung *Tab.* V. dargestellt. Die ganz jungen Kälber, bis sie ein Drittheil der ihnen bestimmten Leibesgröfse erlangen, sind ungehörnt und so kommen sie in den Bildwerken auch immer als Opferthiere vor, z. B. in der Opferscene an den Ruinen des Tempels von Edfou (*Apollinopolis*) die aus der *Descr. de l'Egypt. Vol.* I. *tab.* 59. *fig.* 5. unter unsrer fünften Tafel zur rechten Seite wiederholt ist. Vor dem thronenden Sonnengott (Phre) opfert hier ein Jüngling, dessen Haupt die Mendeshörner zieren, eine junge Antilope; statt der Hörner trägt diese auf dem Kopf den bekannten heiligen Schmuck, in welchem Hirt und Tölken eine rückwärts gekrümmte Straufsfeder erkennen. Bei den halberwachsenen Jungen stehn die Hörner mit dem letzten aufwärts und vorwärts gekrümmten Enden aus der Stirn vor und scheinen auf den ersten Anblick diese Thierchen zu einer ganz eignen Art zu machen. Man braucht aber die Sache nur genau zu erwägen und mit der Ausbildung des Gehörns an unsern wiederkäuenden Hausthieren zu vergleichen, um sich zu überzeugen, dafs das schöne leierförmige Gehörn der *Dorcas* in seiner ersten Entwickelung nicht anders aussehen könne. Vollends beweisend ist dann ein horniger Bast, der die Wurzeln dieser jungen Hörner umkleidet und aus welchem nach und nach die Ringe, zumal an den männlichen Individuen deutlich hervorbrechen. Die Verschiedenheit des Gehörns nach dem Geschlecht ist auch sonst durch die Kleinheit und Dünne desselben an den weiblichen Thieren, gleich in der Jugend ersichtlich. Es ist dies übrigens ein Punkt, der von den neueren Systematikern noch gar nicht berücksichtigt worden und viele der von Herrn Blainville zum Theil nach blofser Ansicht des Schädels als neu beschriebene Arten z. B. *Ant. acuticornis*, *naso maculata* und *Landiana* dürften bei genauerer Untersuchung, sich als Kälber schon bekannter Arten nachweisen lassen.

Die *Dorcas* war das der Isis geheiligte Thier (¹). Wir finden sie daher in den ägyptischen Bildwerken häufiger als irgend eine andere vorgestellt, immer in richtigem Verhältnifs zu den Menschengestalten und durch die Hörnerform so bezeichnet dafs sie auch ohne Andeutung der Farben überall leicht zu erkennen ist. Die schönste Vorstellung dieses Thiers findet sich aber auf einer der Papyrus-Rollen unsrer Bibliothek in einem farbigen Bilde nach ziemlich grofsem Maafsstab. Es ist ein männliches Thier das auf den Hinterfüfsen hockend vorgestellt ist, mit aufgerichtetem Leibe, die Vorderfüfse frei schwebend. Diese gezwungene Stellung und den beigefügten symbolischen Spitzbart abgerechnet, ist die Abbildung in allen Theilen so getreu wie man sie in wenig naturhistorischen Kupferwerken findet. Dafs es die Hörner dieses Thiers sind, welche sich als Attribut an dem Kopfe der Isis, die Sirius-Scheibe umfassend, so häufig finden und die in Beziehung auf diese Göttin auch wohl an andern Göttergestalten vorkommen, ist allgemein anerkannt. Wäre noch ein Zweifel, so würde er durch eben jene Papyrus-Rolle gehoben, auf welcher nicht weit von dem Thier die Göttin mit dessen ganz gleichgebildeten Hörnern geschmückt, erscheint. Diese Darstellung ist mir merkwürdig genug vorgekommen, um sie auf der V^ten Tafel unter dem Bilde der *Dorcas* zu wiederholen.

Eine der *Dorcas* sehr ähnliche Art lebt im südlichen Africa: der sogenannte Springbock *Ant. Euchore Forst.* Sie ist durch viele Kennzeichen unterschieden hauptsächlich aber wieder durch die fast doppelte Gröfse und durch viel bestimmtere und an den dunkeln Stellen gesättigtere Färbung.

Eben so scheint auch die mittel-asiatische Form, die der *Dorcas* entspricht, die nämlich, welche Güldenstedt zuerst unter dem Namen *Ant. subgutturosa* bekannt machte, wirklich eine wesentlich verschiedene Art zu sein, wenn es gleich schwer halten möchte, aus den mangelhaften Beschreibungen, die davon vorliegen, eine recht bestimmte Diagnose zu stellen (²). Gewifs aber von beiden verschieden ist eine zierliche

---

(¹) Aelian *de nat. anim. Lib.* X, *cap.* 23. *Horapollo Hierogl.* I, 49. Vgl. Tölken vom Tempel des Jupiter Ammon in Minutolis Reise S. 127.

(²) Man vergleiche Desmarets *Mammalogie p.* 455, wo ausdrücklich angeführt

Art, welche unsre Reisenden an der Ostseite des rothen Meeres entdeckt und mit dem Namen *Ant. arabica* belegt haben. Eine dunklere Färbung, ein nach Verhältnifs höheres, gestrecktes Gehörn, mit weiter von einander abstehenden Ringen, besonders aber ein grofser schwarzer Fleck mitten auf der Nase sind die Hauptkennzeichen, die aber erst nach einer genauen Vergleichung mehrerer Exemplare in recht bestimmten Ausdrücken angegeben werden können. Die Herren Hemprich und Ehrenberg waren sogar Anfangs geneigt, mehrere Abweichungen in der Länge und Stärke des Gehörns, die sie an den Dorcaden in Sennaar bemerkten, als Kennzeichen mehrerer darunter versteckt liegender Arten anzunehmen, kamen indessen nachmals von dieser Annahme zurück und machen jetzt nur darauf aufmerksam, wie sehr die Hornbildung und Färbung dieser zierlichen Thiere innerhalb gewisser Grenzen wandelbar sei. Die genaueren Angaben dieser Varietäten müssen also späteren Mittheilungen vorbehalten bleiben, da sie erst aus den mündlichen Berichten unsrer Freunde vollständig zu schöpfen sein werden.

---

wird, Herr Cuvier halte die Kennzeichen der *A. subgutturosa* nicht für bestimmt genug, um sie danach von der *Dorcas* zu unterscheiden.

Anhang.

Anhang.

Es sei mir erlaubt, hier einige Bemerkungen folgen zu lassen, die sich mir während des Druckes dieser Abhandlung aufdrängten, die ich aber nicht einzustreuen wagte, weil mir daran liegen mufste, dafs meine Arbeit dieselbe bleibe, die ich vor zwei Jahren der Akademie vorgelegt und deren Bekanntmachung sie beschlossen hatte.

Zuerst ist mir schon damals von einigen Freunden der Vorwurf gemacht worden, dafs ich bei den Zweifeln an der Existenz eines nach seiner ursprünglichen Bildung einhornigen wiederkäuenden Thieres, der neueren Angaben von einer Wiederentdeckung des wahren Einhornes hätte erwähnen sollen. Ich kann aber diese in einigen englischen Zeitschriften enthaltenen Nachrichten nicht für beweisend ansehn, sondern nur (wie ich auch gethan) zugeben, dafs man Jeden gewähren lassen müsse, der sich auf eine solche Wiederentdeckung noch Hoffnung machen will. Die eine dieser Nachrichten, mitgetheilt vom Major Latter (1), beruht ganz auf Aussagen von wenig unterrichteten Eingebornen in Nepaul, die ein zweihufiges Thier von der Gröfse des Pferdes, mit einem langen gekrümmten Horn an der Stirn, kennen wollen, das weit von ihrem Wohnort (30 Tagereisen von Lassa) in der grofsen Tartarei heerdenweise lebe und sehr wild, aber efsbar sei. Die rohe Abbildung, die ein Tibetaner aus dem Gedächtnisse zu seinem Bericht entwarf, kann unmöglich grofsen Werth für die Naturgeschichte haben und die Vermuthung liegt sehr nahe, dafs auch dieses sogenannte tibetanische Einhorn nur eine zufällig einhornige Antilope sei, wie sie schon Pallas kannte. Die andere von dem Missionär Campbell (2) aus dem Innern Africa's herrührende Nachricht spricht ganz deutlich von einem sehr grofsen Rhinoceros, denn des Thieres Kopf hatte fast 3 Fufs Länge und das gerade Horn safs 10 Finger breit über der Nase; auch nannten die Eingebornen es ein Nashorn.

---

(1) *Quarterly Review, Dec.* 1820. und *Asiatic Journal, Vol.* XI, *pag.* 154.

(2) *Asiatic Journal, Vol.* XII, *p.* 36.

2) Eine unserm *Addax* sehr nahe verwandte Antilopen-Art ist im vorigen Jahr von Herrn Otto unter dem Namen *Ant. suturosa* beschrieben und abgebildet worden ([1]). Sie hat zwar geringere Gröfse, aber dieselben Verhältnisse und ist dem *Addax* in der Hornbildung und dem charakteristischen weifsen Querstreif über dem Nasenrücken so ähnlich, dafs man sich bald dazu verstehn würde, beide für Wesen einer und derselben Art anzuerkennen, wenn nicht das Haar, sowohl durch seine dunkle Farbe, als auch durch seine ausnehmende Länge und die sehr ins Auge fallenden Näthe die es bildet, die auffallendsten Abweichungen darböte. Indessen darf dabei nicht vergessen werden, dafs dieses Thier in einem früheren Alter aus Aegypten nach Europa gebracht wurde. Der Thierhändler Advinant kaufte es im Jahr 1822 in Venedig von Pilgrimen, die über Alexandrien aus Palästina zurückkehrten. Derselbe hat mir noch bei seinem letzten Besuch in Berlin (April 1826) erzählt, dafs das Thier damals zwar schon dunkel gefärbt, aber nur schwach behaart gewesen, jedoch schon im ersten Winter eine reichere Behaarung gewonnen habe, wobei die so charakteristischen Haarnäthe zum Vorschein gekommen seien. Zu Anfang des Jahres 1824 kam er damit nach Breslau, wo Herr Otto es sah und das Versprechen erhielt, es, falls es stürbe, für das dortige Museum zu bekommen. Der Tod des Thiers erfolgte im Sommer desselben Jahrs zu Marienwerder, von wo aus es nach Breslau gesandt wurde, wo es geschickt ausgestopft ist und meinem Freunde zu der oben erwähnten Abhandlung gedient hat.

Est ist kein ungewöhnlicher Fall, dafs dünnbehaarte Säugethiere aus warmen Ländern in unserem rauheren Klima sich mit reichem Pelz bedecken, und besonders scheint dies die Wiederkäuer zu treffen.

Der in Italien fast nackte Büffel gewinnt in unserm Lande ein langes glänzendes Haar, wie die schönen Exemplare, welche auf Befehl Seiner Majestät unsers Königs, auf der Pfauen-Insel unterhalten wurden und von welchen das gröfste noch jetzt im zoologischen Museum aufbewahrt wird, beweisen können. Zwei bactrische Kamele, die der Kosacken-Hettmann, Graf Platow, im Jahr 1809 Ihrer Majestät der verewigten Königin verehrte und die schon im Frühling 1810 in Berlin

---

([1]) *Nova acta Acad. Caes. Leopold. Nat. Curios. Vol.* XII. *P.* 2, *pag.* 521.

starben und seitdem ebenfalls das zoologische Museum zieren, zeigen einen so reichen Pelz, wie man an denselben Thieren in ihrem Vaterlande nie zu sehn bekommt. Die Beispiele der veredelten Schaafe und Ziegen, deren Zucht bei uns, und was letztere betrifft, besonders in Gebirgsgegenden so vorzüglich gelingt, beweisen die vom Klima abhängige Veränderung des Haarwuchses eben so sehr, als die entgegengesetzte Erfahrung, dafs europäische Thierformen in den Steppen-Gegenden dünnbehaart und schmächtig erscheinen, so dafs man z. B. in dem Fuchs, der Katze, dem Hasen der libyschen Wüste, die unsrigen wieder zuerkennen sich nicht leicht entschliefst.

Es ist daher wohl glaublich, dafs diese *Ant. suturosa* sich zu dem *Addax* nur als Varietät verhalte; doch will ich dabei nicht verschweigen, was sich auch gegen diese Meinung beibringen läfst. In der Abbildung nämlich zeigt jene nicht die breiten Hufe des *Addax* und in der Beschreibung würde ein so trefflicher Beobachter, wie Otto ist, davon in bestimmteren Ausdrücken gesprochen haben, wenn diese Breite der Hufe vorhanden wäre. Demnächst finde ich an unserm Exemplar des *Addax* auch nicht eine Spur von den Näthen, die hier so sehr bezeichnend erscheinen. Alles Haar auf dem Rücken und an den Seiten ist glatt anliegend, mit den Spitzen nach hinten gerichtet und der erwähnte Haarwirbel im Nacken der einzige, den ich an dem Thier entdecken kann. Dies mag zum Theil wohl der ungemeinen Dünne und Kürze des Haars mit zugeschrieben werden müssen, im Uebrigen finde ich aber auch, dafs die Haarnäthe an den andern Antilopen variiren. So hat das männliche Junge der *Dama* am Oberhals nicht das rücklaufende Haar, auf dem Widerrüst nicht den Wirbel, den die andern drei Exemplare zeigen, und eben so ist Verschiedenheit der Wirbelstellen bei einigen südafricanischen Antilopen. Man hat sich daher wahrscheinlich wohl in Acht zu nehmen, dafs man die Haarnäthe und Wirbel nicht überall zu diagnostischen Merkmalen erhebe.

Nach Allem diesen mufs es nun fürerst noch zweifelhaft bleiben, ob die *Ant. suturosa* als eine eigene Art betrachtet werden dürfe. Wiewohl mir gleich bei den ersten Mittheilungen, die mir Herr Otto darüber machte, die überwiegenden Gründe für das Gegentheil zu stimmen schienen, so mufste es mir doch sehr willkommen sein, dafs mein

Freund seine Beobachtung öffentlich bekannt machte, und ich rieth selbst dazu, sie fürerst als neue Species aufzustellen, damit die künftige, genauere Untersuchung dadurch um so mehr angeregt werde.

3) Die (S. 225.) erwähnte Abhandlung des Hrn. Hofrath Böttiger in Dresden über die *Subulonen* des Plinius [1], enthält mehrere Fragen, die, soweit sie nicht schon durch einzelne Bemerkungen in der vorstehenden Abhandlung beantwortet sind, hier noch eine kurze Erörterung finden mögen.

Zuerst wiederhole ich hier, überzeugt zu sein, dafs Plinius mit dem *Subulo* nichts anderes, als den Hirsch-Spiefser gemeint haben könne. Demnächst aber scheint es mir in vieler Beziehung wichtig, nunmehr unleugbar annehmen zu dürfen, es gebe Spiefser (*Subulones* mit geradem pfriemenförmigen Gehörn) auch in der Antilopen-Gattung. Darauf besonders habe ich den Schlufs gegründet, die auf antiken Darstellungen vorkommenden Opferthiere, mit pfriemenförmigen Hörnern, seien weder Hirschspiefser, noch ausgewachsene Antilopen (denn für beides erscheinen sie zu klein im Verhältnifs zu den Menschengestalten) sondern Antilopen-Kälber. Es ist mir kaum glaublich, dafs die an ihren Enden sehr knorpligen Röhrenknochen solcher junger Thiere ein gutes Material zur Verfertigung von musicalischen Blase-Instrumenten sollten abgegeben haben; wenigstens mufsten sich die harten Tibien erwachsener Wiederderkäuer viel besser dazu eignen. Und nun fragt es sich: können die von Natur hohlen Hörner solcher *Subulonen* nicht auch zu ähnlichem Zweck benutzt worden sein und finden sich im Alterthum Spuren des Gebrauchs von Wiederkäuer-Hörnern zu Blase-Instrumenten?

Die berühmte Barberinische Mosaik von Palestrina, zu deren genaueren Erklärung von Seiten der darauf abgebildeten Thiere mein verehrter Gönner mich am Ende seiner Abhandlung auffordert, enthält wenig, was dem Zweck der vorstehenden Abhandlung nahe läge und worüber sich zugleich Bestimmtes aussagen liefse. Ueberhaupt möchte es schwer halten, ohne Ansicht des farbigen Originals oder einer sehr vollständigen Abbildung, sich mit Sicherheit über die wenigen Thiergestalten, die zweifelhaft bleiben (denn bei den meisten ist die Erklärung schon

---

(1) *Amalthea,* 3r Band, S. 191.

durch den hinzugefügten Namen gegeben) zu verständigen. So wichtig dies merkwürdige Denkmal dem Alterthumsforscher in so vieler Hinsicht auch sein mag, so glaube ich dennoch kaum, dafs dessen Untersuchungen durch den Beistand eines Zoologen hier auf eine irgend erhebliche Weise gefördert werden können. Die mehrsten Thiergestalten, die es enthält, sind unverkennbar, und die übrigen fast sämmtlich entweder fabelhaft oder auch bei der strengsten Vergleichung nicht mit Sicherheit zu bestimmen.

4) Herrn Dr. Ehrenberg's nunmehr erfolgte Rückkehr setzte mich in den Stand, ihn wegen der Namen, welche die Eingebornen den hier beschriebenen Antilopen-Arten geben, näher befragen zu können, und er ist so gefällig gewesen, mir das folgende Verzeichnifs zur Vervollständigung meiner Abhandlung mitzutheilen:

ابوحرب *Abu harb* . . . . ist der arabische Name des *Oryx.*
ابوعقش *Abu Akasch* . . . . . . — — — — — *Addax.*
عدره *Addra* . . . . — — — — der *Dama.*
اريل *Ariel.* . . . . — — — — — *Dorcas.*
عنز *Anse* . . . . heifst das Weibchen derselben Art.
غزال *f.* غزل *Gasāl* oder *Gasal.* Eine nahe damit verwandte Art in Arabien führt dort vorzugsweise diesen Namen.
حمرا . . . . . *Hamra* . . . . heifst eine in Nubien seltne Art, welche die *Dorcas* an Gröfse etwas übertrifft, roth von Farbe und von schwachem Gehörn.

Die zuerst von Salt erwähnte, ungemein zierliche *Modoqua*-Antilope aus Abessinien führt dort seltner diesen Namen als den Namen *Addro,* und die *Oryx* heifst dort *Hakaba.* In Syrien aber werden die mit der *Dorcas* verwandten Arten sämmtlich mit dem Namen *Ariel* bezeichnet, den sogar hin und wieder der Dammhirsch trägt.

Verallgemeinerung einiger in der Abhandlung über die ausführlichere Bezeichnung der Krystallflächen (s. d. Abh. d. phys. Kl. a. d. J. 1818 u. 19. S. 270-304.) vorgetragenen Lehrsätze.

Von

H^m. C. S. WEISS.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 26. Februar 1824.]

I. Vollständigerer Ausdruck des a. a. O. S. 277. aufgestellten Lehrsatzes über die Theilung der Dreiecke.

Wir theilten ein Dreieck ABC (Fig. 1.) beliebig durch zwei Linien AD und CE, aus den Ecken A und C nach beliebigen Punkten D und E der gegenüberliegenden Seiten gezogen; wir bestimmten durch die einfachsten Formeln das Verhältnifs der Stücke, sowohl der getheilten Seiten des Dreiecks, als der sich einander schneidenden, theilenden Linien selbst, indem von zwei gegebenen Verhältnissen solcher Paare die beiden andern abhängig sind. Wir ziehen jetzt aus der dritten Ecke B durch den Schneidungspunkt F der Linien AD und CE die Linie BQ, so entstehen uns sechs Paare von Stücken, sowohl der Seiten des Dreiecks, als der theilenden Linien AD, BQ und CE, von welchen immer das gegebene Verhältnifs zweier solcher Paare die übrigen bestimmt. Es treten daher für jedes Paar zehn Gleichungen ein; denn es wird z. B. für jede getheilte Seite des Dreiecks das Verhältnifs der Stücke gefolgert, entweder aus dem gegebenen Verhältnifs der Stücke

in den beiden andern, oder aus dem in einer von ihnen und einer der drei inneren Linien, oder endlich aus den dreierlei Combinationen der getheilten inneren Linien, wenn für zwei von ihnen das Verhältnifs ihrer Stücke bekannt ist; und so umgekehrt durch zehn ähnliche Formeln das Verhältnifs der Stücke einer inneren theilenden Linie.

Es ergeben sich für die Bestimmung der Stücke einer Seite des Dreiecks durch die gegebenen Verhältnisse der Stücke der beiden andern, und eben so für die einer inneren getheilten Linie durch die beiden andern überaus einfache Lehrsätze; die übrigen Bestimmungen lassen sich füglich nur durch die Formeln selbst aussprechen.

Es sind nehmlich die Produkte je dreier abwechselnder Stücke der getheilten Seiten des Dreiecks sich gleich, also

$$AE \times BD \times CQ = EB \times DC \times QA$$

folglich $AE : EB = DC \times QA : BD \times CQ$

oder es verhalten sich die Stücke einer getheilten Seite, wie die Produkte der, einem jeden anliegenden und gegenüberliegenden Stücke der beiden andern.

Der Beweis ist eben so leicht zu führen, als der des früheren, a. a. O. S. 277. aufgestellten Lehrsatzes selbst. Wir ziehen aus C sowohl CG parallel mit AD, als CH parallel mit BQ, beide bis zum Durchschnitt mit der verlängerten AB, so ist, wie dort erwiesen wurde,

$$CD : DB = AE \,.\, CF : FE \,.\, AB$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABQ und AHC aber folgt

$$CQ : QA = BH : AB, \text{ oder } BH = \frac{AB \,.\, CQ}{QA}$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FEB und CEH,

$$CF : FE = BH : EB = \frac{AB \,.\, CQ}{QA} : EB.$$

Also ist $CD : DB = AE \,.\, \frac{AB \,.\, CQ}{QA} : EB \,.\, AB = AE \,.\, CQ : EB \,.\, QA$

folglich $AE \,.\, CQ \,.\, DB = EB \,.\, QA \,.\, CD$, wie oben.

Die übrigen Formeln abzukürzen und überschaulicher zu machen, benennen wir wieder die einzelnen Stücke der getheilten Linien mit einfachen Buchstaben, und um der Anschauung bei der Auffassung der Bedeutung der einzelnen Ausdrücke soviel als möglich zu Hülfe zu kommen, gebrauchen wir für jedes Paar von Stücken einen Vokal mit dem auf ihn folgenden Consonanten in der natürlichen Folge, so dafs wir die Stücke der getheilten Seiten des Dreiecks, a, b; e, f; i, k nennen, die abwechselnden Stücke mit Vokalen, die mit ihnen abwechselnden mit den Consonanten bezeichnend. Wir setzen für die Stücke der getheilten inneren Linien dieselbe Reihe der Vokale, mit den auf sie folgenden Consonanten so fort, dafs wir die Vokale o, u, y den, den Ecken zugekehrten Stücken beilegen, die ihnen folgenden Consonanten p, v, z den den Seiten zugekehrten Stücken, so dafs o, p der gegen die Seite $a + b$; u, v der gegen $e + f$; und y, z der gegen die Seite $i + k$ sich richtenden Linie zukommt. Wir setzen also für AE, a, u.s.f. wie die Fig. 1. zeigt.

Wir geben die Formeln für eine getheilte Seite des Dreiecks unter der Form des Verhältnisses $a : b$, und die für eine getheilte innere Linie unter der Form $o : p$, und fügen jedem den entsprechenden Werth seines Ganzen, d.i. $a + b$ und $o + p$ bei, da es im Gebrauch eben so oft vorkommt, dafs das Verhältnifs eines Stückes zu seinem Ganzen das unmittelbar gesuchte ist, als das der Stücke zu einander, und da bald in einem der ersteren, bald in einem der anderen Verhältnisse die einfachere Regel unmittelbar sich ausspricht.

Von den je zehn Proportionen für die Bestimmung der Stücke einer äufseren sowohl als einer inneren Linie des Dreiecks konnten drei aus dem Lehrsatz, wie wir ihn in der früheren Abhandlung vortrugen,

unmittelbar abgeleitet werden [1]; drei andere sind die nemlichen Proportionen, nur das dritte gleichartige Element, sei es Seite des Dreiecks oder theilende Linie, einem der beiden ersten substituirt. Von den vier übrigen Proportionen sind wiederum zwei ähnliche Gegenstücke zu einander mit Austausch analog liegender Theile als gegebener; drei aber sind, wesentlich verschieden unter sich und von den ersten sechs, Folgen der Erweiterung des Lehrsatzes. Ueberhaupt also sind von den zu gebenden je zehn Proportionen sechs wesentlich verschiedener Construction, vier aber als Wiederholungen von vieren der sechs anzusehen.

Die Art wie wir aus den ersten, durch die geometrische Demonstration unmittelbar erhaltenen Proportionen, die übrigen finden, bedarf keiner ausführlichen Erörterung. Wir suchen z. B. die Theilung einer innern Linie, wenn uns die der beiden andern innern Linien gegeben ist. So giebt uns der frühere Lehrsatz unmittelbar [2]

$$o : p = uf + v\,(e+f) : ue.$$

---

[1] Alle Proportionen nemlich, wie sie in dem früher vorgetragenen Lehrsatz direct begründet waren, wo wir y und x nannten, was jetzt e und f, n und m, was jetzt o und p, und v und w, was jetzt u und v genannt ist, waren vollständig diese:

$$x : y : x+y = \begin{cases} na : m\,(a+b) : na + m\,(a+b) \\ aw : bv - aw : bv \\ nv - mw : m\,(v+w) : v\,(n+m) \end{cases}$$

$$a : b : a+b = \begin{cases} vx : w\,(x+y) : vx + w\,(x+y) \\ mx : ny - mx : ny \\ nv - mw : w\,(n+m) : n\,(v+w) \end{cases}$$

$$n : m : n+m = \begin{cases} x\,(a+b) : ya : ya + x\,(a+b) \\ w\,(a+b) : vb - wa : b\,(v+w) \\ vx + w\,(x+y) : vy : (v+w)\,(x+y) \end{cases}$$

$$v : w : v+w = \begin{cases} a\,(x+y) : bx : bx + a\,(x+y) \\ m\,(x+y) : ny - mx : y\,(n+m) \\ na + m\,(a+b) : nb : (n+m)\,(a+b) \end{cases}$$

Je drei solche sind es, welche sich in der nunmehrigen, verallgemeinerten Aufstellung, unter veränderten Buchstaben, wiederfinden; sie beruhen auf folgenden vier Grundgleichungen: I. $nya = mx\,(a+b)$; II. $vbx = wa\,(x+y)$; III. $vbn = w\,(an+am+bm)$; oder $w\,(a+b)\,(n+m) = bn\,(v+w)$; IV. $nyv = m\,(xv+xw+yw)$; oder $m\,(x+y)\,(v+w) = yv\,(n+m)$.

[2] Es ist dies die Uebersetzung der Formel $n : m = vx + w\,(x+y) : vy$, wie sie in der vorigen Note hiefs, in die gegenwärtige Bezeichnung.

Wir müssen jetzt e und f in u und v, und y und z auflösen. Dies geschieht durch Anwendung einer andern Formel des nemlichen Lehrsatzes $e:f:e+f=uy-vz:z(u+v):u(y+z)$ [1].

So ist

$$o:p=uz(u+v)+vu(y+z):u(uy-vz)=z(u+v)+v(y+z):uy-vz$$

und $o:p:o+p=z(u+v)+v(y+z):uy-vz:(u+v)(y+z)$.

Folgendes sind nun die Proportionen zur Auffindung des Verhältnisses der Stücke, sei es einer getheilten Seite des Dreiecks, oder einer getheilten inneren Linie desselben, aus zwei gegebenen andern.

$$a:b:a+b=\begin{cases} fk : ei : ei+fk \\ uf : v(e+f) : uf+v(e+f) \\ z(i+k) : yi : yi+z(i+k) \\ fp : eo-fp : eo \\ ko-ip : ip : ko \\ iu-kv : iv : iu+v(i-k) \\ fz : fy-ez : fy+z(f-e) \\ ou-pv : v(o+p) : o(u+v) \\ z(o+p) : oy-pz : o(y+z) \\ z(u+v) : v(y+z) : z(u+v)+v(y+z) \end{cases}$$

$$o:p:o+p=\begin{cases} f(a+b) : ea : ea+f(a+b) \\ i(a+b) : kb : kb+i(a+b) \\ fk+ei : ek : ei+k(e+f) \\ v(a+b) : ub-va : b(u+v) \\ z(a+b) : ya-zb : a(y+z) \\ uf+v(e+f) : ue : (u+v)(e+f) \\ yi+z(i+k) : yk : (y+z)(i+k) \\ f(y+z)-ez : ez : f(y+z) \\ i(u+v)-kv : kv : i(u+v) \\ z(u+v)+v(y+z) : uy-vz : (u+v)(y+z) \end{cases}$$

Die letzte Formel führt offenbar auf den Ausdruck

$$\frac{o}{o+p}=\frac{z}{y+z}+\frac{v}{u+v}$$

---

[1] Die Formel der vorigen Note

$$a:b:a+b=nv-mw:w(n+m):n(v+w)$$

wird hier so angewendet, dafs e für a, f für b gesetzt wird; dann mufs u für n, v für m, y für v, und z für w gesetzt werden; und so in ähnlichen Fällen.

welches in Worten ausgedrückt, soviel heifst als: von einer getheilten inneren Linie ist das gegen die Ecke gekehrte Stück von seinem Ganzen der so vielste Theil, als die Summe der Theile, welche die gegen die Seiten gekehrten Stücke der beiden andern innern Linien von ihren Ganzen sind.

Wenn aber $\frac{o}{o+p} = \frac{z}{y+z} + \frac{v}{u+v}$, so ist auch

$$\frac{u}{u+v} = \frac{z}{y+z} + \frac{p}{o+p}, \text{ und}$$

$$\frac{y}{y+z} = \frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v}$$

Es ist also offenbar

$$\frac{o}{o+p} + \frac{u}{u+v} + \frac{y}{y+z} = 2 \cdot \left(\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z}\right)$$

oder: die Summe der Quotienten, welche die gegen die Ecken gekehrten Stücke der getheilten innern Linien von ihren Ganzen ausdrücken, ist doppelt so grofs, als die Summe derer, welche die gegen die Seiten gekehrten Stücke ausdrücken.

Da aber ferner $\frac{p}{o+p} = 1 - \frac{o}{o+p}$, und

$$\frac{z}{y+z} = \frac{o}{o+p} - \frac{v}{u+v} \text{ oder } \frac{v}{u+v} = \frac{o}{o+p} - \frac{z}{y+z},$$

so ist $\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z} = 1 - \frac{o}{o+p} + \frac{o}{o+p} - \frac{z}{y+z} + \frac{z}{y+z} = 1$

kurz $$\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z} = 1$$

und $$\frac{o}{o+p} + \frac{u}{u+v} + \frac{y}{y+z} = 2$$

mit Worten ausgedrückt: Die Summe der Quotienten, welche die gegen die Seiten des Dreiecks gerichteten Stücke der getheilten inneren Linien im Verhältnifs zu ihren Ganzen ausdrücken, ist Eins; die Summe derer, welche die gegen die Ecken gerichteten Stücke ausdrücken, ist gleich Zwei; ein Satz, der durch seine Allgemeinheit — denn bisher kannte man ihn

wohl nur beiläufig für den Fall, wenn die theilenden Linien aus den Ecken nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogen sind — in seiner hier erwiesenen Allgemeinheit, sage ich, gewifs nicht minder merkwürdig ist, als jener zuerst vorgetragene, welcher die getheilten Seiten des Dreiecks betraf, und die Gleichheit der Produkte je dreier abwechselnder Stücke derselben aussprach.

II. Verallgemeinerung der in der angeführten Abhandlung S. 275 und 300 gegebenen ausführlichen Zeichen der Krystallflächen des sphäroëdrischen Systems.

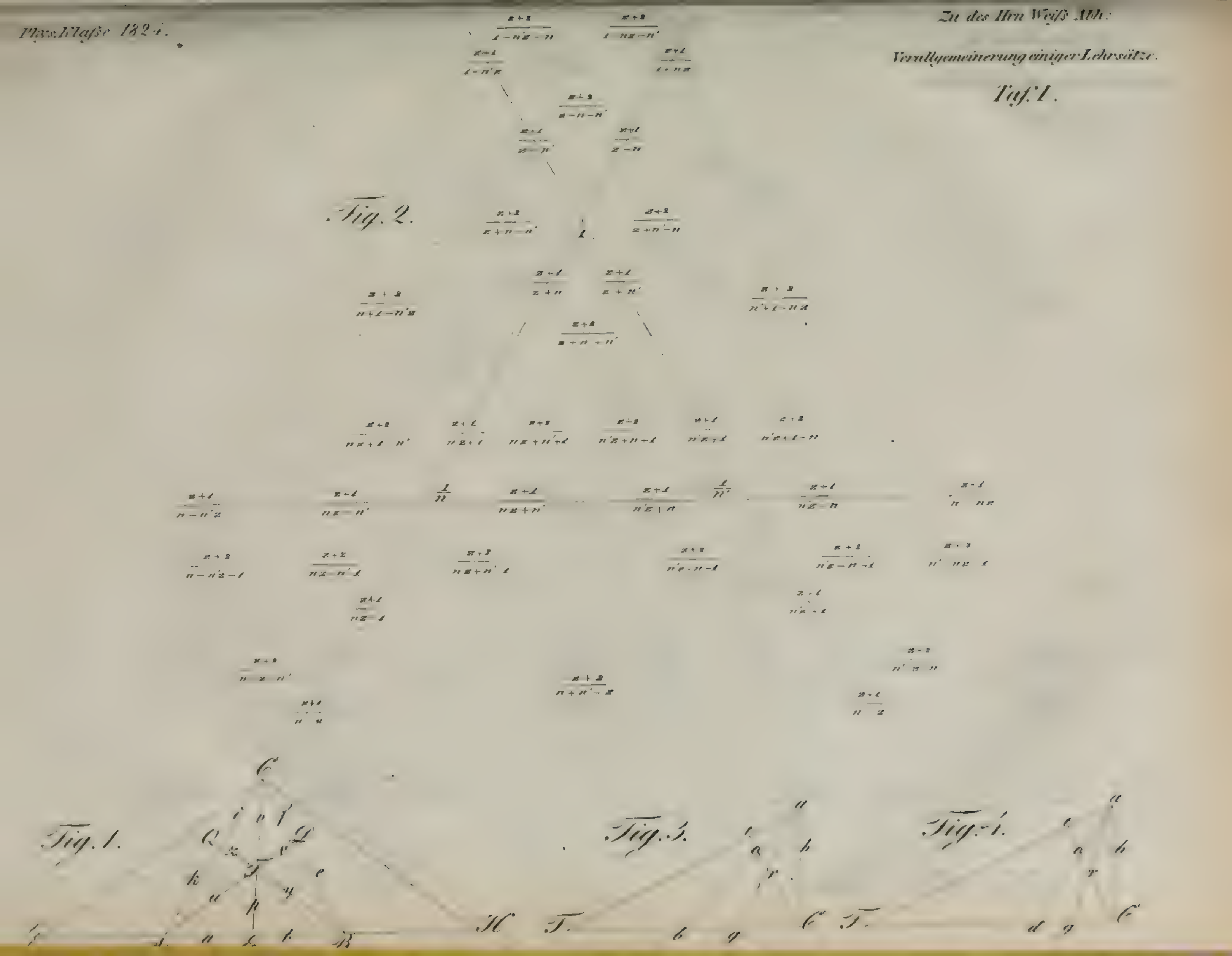
In jenen Zeichen gaben wir an, wieviel eine Fläche, von welcher bekannt ist, wieviel sie abschneidet in jeder der drei Grunddimensionen des Systems, d. i. in den gröfsten Octaëderdimensionen oder den auf den Würfelflächen senkrechten, zugleich abschneidet in jeder der sechs mittleren zwischen je zwei der vorigen, d. i. in jeder der sechs auf den Granatoëderflächen senkrechten; ferner in jeder der vier kleinsten Octaëderdimensionen, oder der auf den Octaëderflächen senkrechten, d. i. der mittleren zwischen je drei der ersten; endlich in jeder der zwölf auf den Flächen des Leucitkörpers senkrechten, d. i. der mittleren zwischen den letzteren und den ersteren, so wie zugleich zwischen je zwei benachbarten der zweiten Gattung. Ob nun gleich nicht allein von allen den genannten fünfundzwanzig Dimensionen Rechenschaft gegeben, sondern auch positive und negative Werthe in ihnen unterschieden werden mufsten, so vereinigte sich doch in dem gegebenen bildlichen Zeichen die bestimmte Beziehung jeder möglichen Stelle im Bilde auf alles zu unterscheidende in den Dimensionen mit der höchsten Einfachheit aller auszudrückenden Werthe und ihrem harmonischen Zusammenhang untereinander so glücklich, dafs, auch abgesehen von den mannichfaltigen Vortheilen, welche ein solches Bild für die Berechnung der Körper des

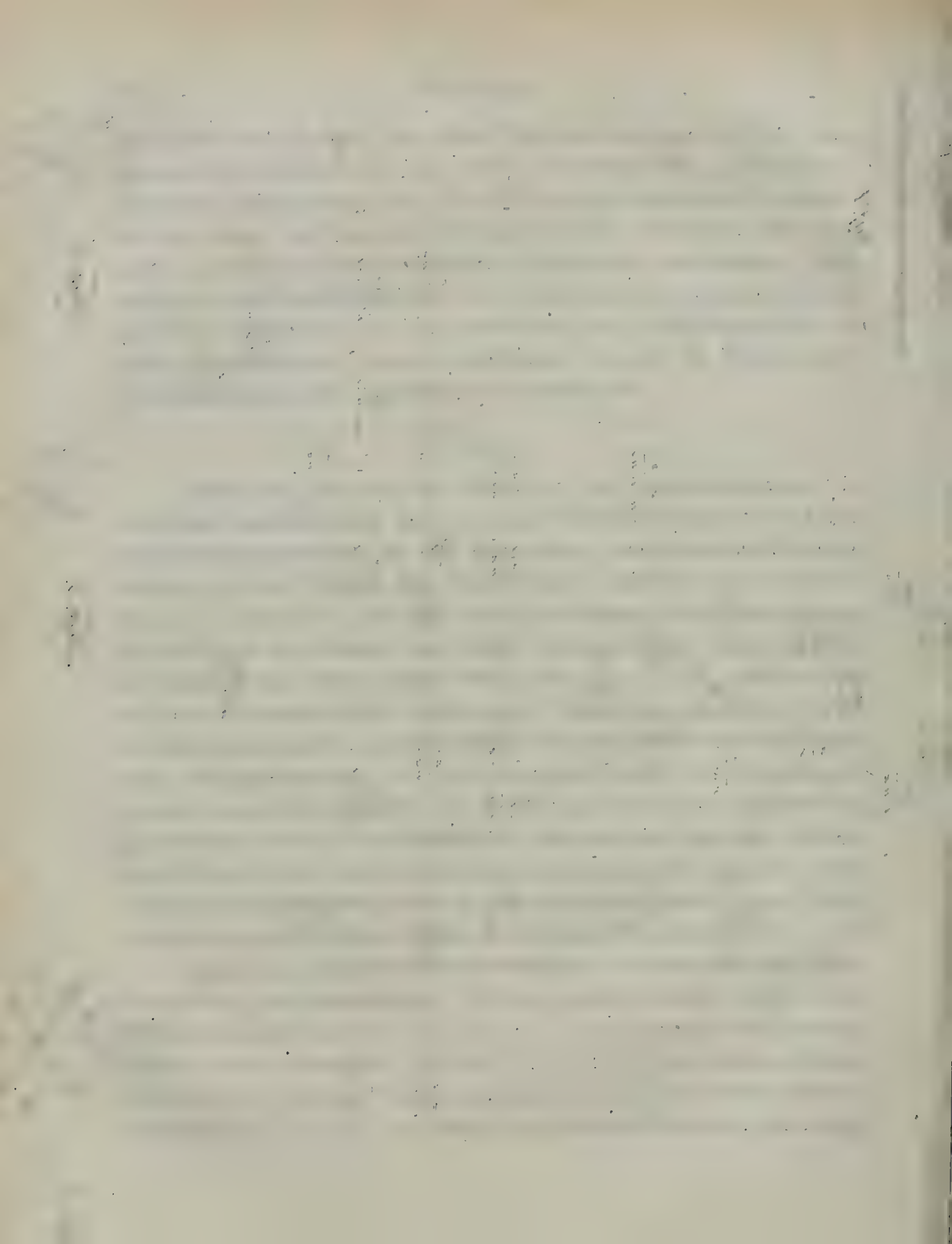
sphäroëdrischen Systems und ihrer Eigenschaften gewährt, ihm sein geometrisches Interesse für sich bleibt. Es scheint mir, dafs eben in diesem die Aufforderung liegt, dem Bilde die gröfstmögliche Allgemeinheit zu geben, und es auf die entsprechenden Werthe in allen und jeden erdenklichen zwischenliegenden Dimensionen auszudehnen. Dies gelingt in ähnlicher Einfachheit, wie sie sich schon in der ersten Gestalt des Bildes ankündigte; und ich erlaube mir, es hier schrittweise bis zu seiner allergenerellsten Gestalt fortzuführen, da jede der Stufen seiner Verallgemeinerung ihr eigenthümliches Interesse hat.

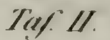
§. 1.

Suchen wir fürs erste die Werthe in den zwischenliegenden Dimensionen zwischen jenen sechs mittleren Octaëderdimensionen und den drei Grunddimensionen, so sind dies solche, welche senkrecht stehen werden auf den Flächen der verschiedenen möglichen Pyramidenwürfel. Es ist klar, dafs ihre Stellen in unserm Bilde liegen müssen in den Seiten des Dreiecks und deren Verlängerungen, immer je zwei zu beiden Seiten einer solchen Stelle, wie $\frac{2}{n+1}$ u. s. f., welche der auf der Granatoëderfläche senkrechten Dimension angehörte, d. i. zwischen einer solchen und den Stellen der drei Grunddimensionen oder ihrer Entgegengesetzten, d. i. der negativen Werthe der Grunddimensionen (deren Stellen im Bilde, in der Verlängerung im Unendlichen liegen sowohl von den Seiten des Dreiecks, als von jeder Richtung, die von den Stellen der drei Grunddimensionen aus irgend wohin gezogen wird). In den Granatoëderflächen fallen je zwei Pyramidenwürfelflächen in Eine, und so die entsprechenden Stellen in unserm Bilde ebenfalls.

Es sei nun die Pyramidenwürfelfläche, in deren Normalen oder Senkrechten die verschiedenen Werthe gesucht werden, nach einem allgemeinen Ausdruck = $\boxed{a : z\,.\,a : \infty a}$, und irgend eine gegebene Fläche, deren Werthe in den auf $\boxed{a : z\,.\,a : \infty a}$ senkrechten Dimensionen gesucht werden, heifse wiederum, wie wir sie früher bezeichnet haben $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$, so findet sich, wenn als Einheit in der neuen


Phys. Klasse 1824.
Zu des Hrn Weiß Abh:
Verallgemeinerung einiger Lehrsätze.
Taf. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.





Zu des Hrn. Weiss Abh.:

Verallgemeinerung einiger Lehrsätze

Taf. II.

$\frac{z+y+1}{1-ny-n'z}$ $\frac{z+y+1}{1-nz-n'y}$

$\frac{z+y+1}{y-n-n'z}$ $\frac{z+y+1}{y-n'-nz}$

$\frac{z+y+1}{y+n-n'z}$ $\frac{z+y+1}{y+n'-nz}$

$\frac{z+y+1}{z-n-n'y}$ $\frac{z+y+1}{z-n'-ny}$

$\frac{z+y+1}{z+n-n'y}$ $\frac{z+y+1}{z+n'-ny}$

Fig. 5.

$\frac{z+y+1}{ny+z-n'}$ $\frac{z+y+1}{n'y+z-n}$

$\frac{z+y+1}{ny+z+n'}$ $\frac{z+y+1}{n'y+z+n}$

$\frac{z+y+1}{nz+y-n'}$ $\frac{z+y+1}{nz+y+n'}$ $\frac{z+y+1}{n'z+y+n}$ $\frac{z+y+1}{n'z+y-n}$

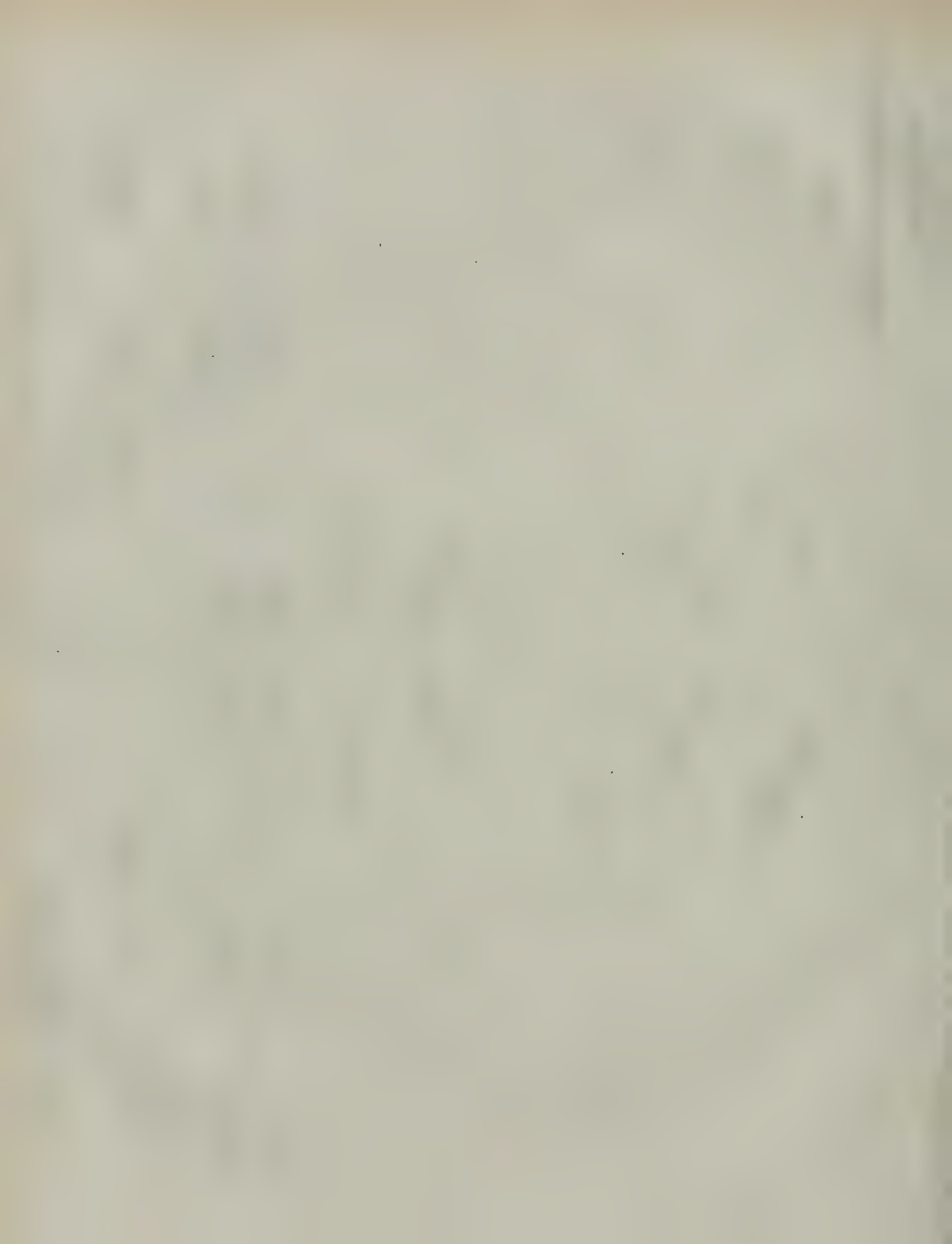
$\frac{z+y+1}{ny+1-n'z}$ $\frac{z+y+1}{nz+1-n'y}$ $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ $\frac{z+y+1}{n'z+1-ny}$ $\frac{z+y+1}{n'y+1-nz}$

$\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n'}$

$\frac{z+y+1}{ny-1-n'z}$ $\frac{z+y+1}{nz-1-n'y}$ $\frac{z+y+1}{nz+n'y-1}$ $\frac{z+y+1}{n'z+ny-1}$ $\frac{z+y+1}{n'z-1-ny}$ $\frac{z+y+1}{n'y-1-nz}$

$\frac{z+y+1}{n-y-n'z}$ $\frac{z+y+1}{nz-n'-y}$ $\frac{z+y+1}{nz+n'-y}$ $\frac{z+y+1}{n'z+n-y}$ $\frac{z+y+1}{n'z-n-y}$ $\frac{z+y+1}{n'-y-nz}$

$\frac{z+y+1}{n-z-n'y}$ $\frac{z+y+1}{ny-n'-z}$ $\frac{z+y+1}{ny+n'-z}$ $\frac{z+y+1}{n'y+n-z}$ $\frac{z+y+1}{n'y-n-z}$ $\frac{z+y+1}{n'-z-ny}$



Verallgemeinerung einiger Lehrsätze

Taf. III.

Fig. 6.

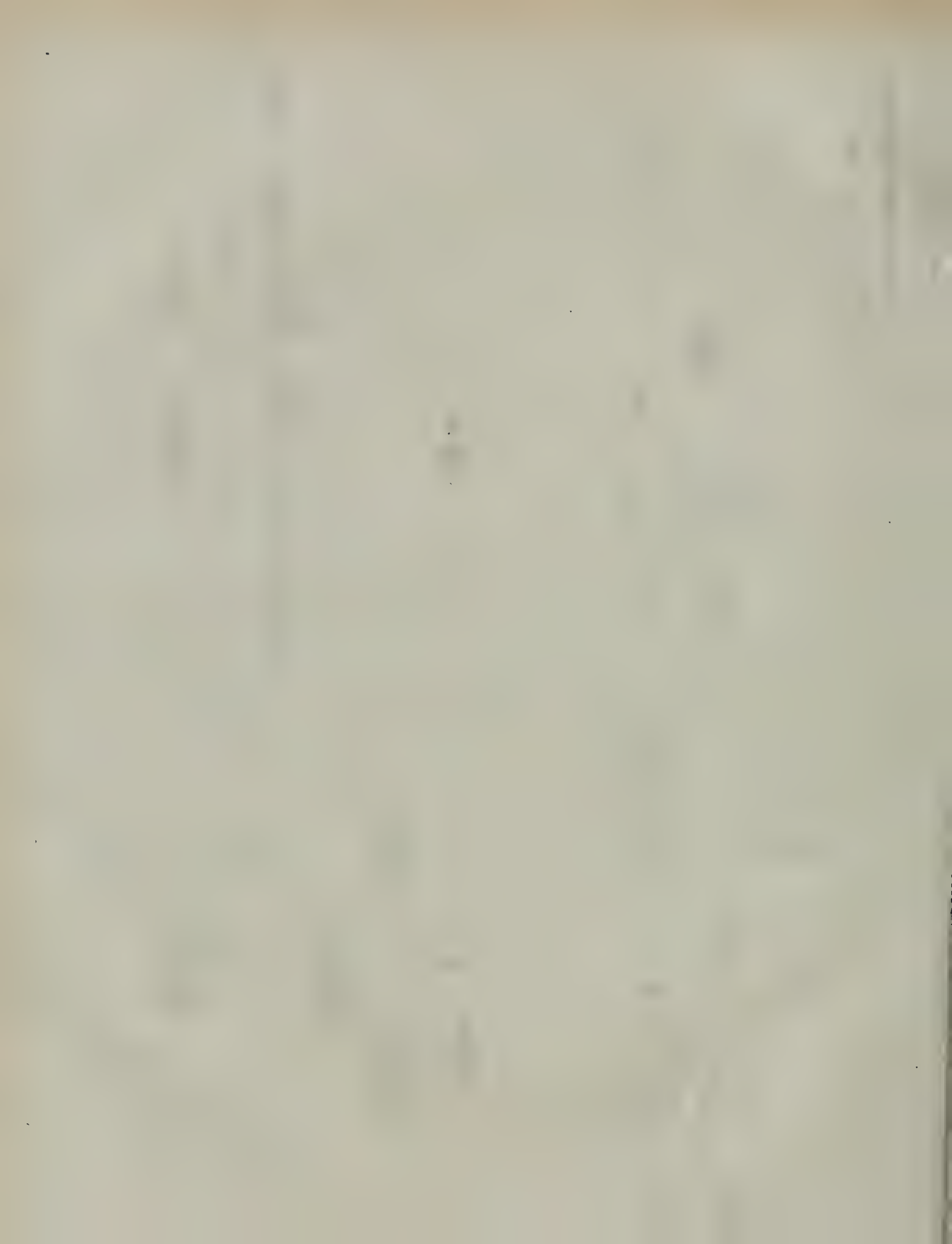
Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.



Dimension angenommen wird die Linie im Octaëder aus dem Mittelpunkt nach demjenigen Punkte der Octaëderkante gezogen, in welchem die Octaëderkante von der neuen (durch den Mittelpunkt des Octaëders gelegten) Dimension geschnitten wird, die gesuchte Gröfse als diese Einheit multiplicirt mit einem Coëfficienten von der Form $\frac{z+1}{1.z+n.1}$, $\frac{z+1}{n.z+1.1}$ u. s. f. — man vergleiche Fig. 2. — so dafs der Zähler des Bruches allen zu unterscheidenden achtzehn Werthen [1] gemeinschaftlich ist, der Nenner aber die Summe der Produkte der Divisoren in den Werthen der Grunddimensionen, zwischen welchen die gesuchte liegt, der Divisor der ihr zunächst liegenden multiplicirt mit z, der andere multiplicirt mit 1. Die Einheit der neuen Dimension δ aber, ausgedrückt in der Einheit des ganzen Systems, d. i. der Grunddimension selbst, oder die halbe Octaëderaxe $= 1$ gesetzt, ist

$$\delta = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}.$$

Daher, wenn man eine jede der gesuchten Gröfsen unmittelbar in der Einheit des Systems ausdrücken will, der gemeinschaftliche Zähler aller Coëfficienten, $z+1$, nur zu vertauschen ist mit $\sqrt{z^2+1}$; die gesuchten Werthe sind also in dieser Einheit $\frac{\sqrt{z^2+1}}{z+n}$, $\frac{\sqrt{z^2+1}}{n.z+1}$ u. s. f. In dem Bilde selbst aber werden wir, wie bisher, die Coëfficienten der neuen Dimensionseinheit als solche, im Zähler mit $z+1$ schreiben.

Wird $z = 1$ gesetzt, so haben wir offenbar die mittleren Octaëderdimensionen selbst, oder die senkrechten auf den Granatoëderflächen $= \boxed{a : a : \infty a}$; und je zwei Werthe, wie die oben geschriebenen, fallen zusammen in den Werth $\frac{2}{n+1}$, d. i. in den, welchen unser frü-

---

[1] Von den zwölf neuen Dimensionen sind wiederum in sechsen die der geschriebenen Fläche zukommenden Werthe, an den Stellen nemlich, welche innerhalb unsers Dreiecks liegen, nothwendig positiv; ihre negativen sind daher im Bilde ausgeschlossen. In den sechs andern aber kann der geschriebenen Fläche der Werth sowohl in positivem als in negativem Sinne zukommen; daher hat unser Zeichen 6 + 12, d. i. achtzehn verschiedene Stellen, welche sich auf diese Dimensionen beziehen, zu unterscheiden; und eben soviel wirklich correspondirende Stellen giebt es in demselben.

heres Bild für den Werth in einer mittleren Octaëderdimension, deren Einheit wir d nannten, angab; der Werth $\sqrt{z^2+1}$ wird $=\sqrt{2}$, wie dies die Gröfse war, welche den Zählern der Coëfficienten der mittleren Octaëderdimensionen substituirt werden konnte, um diese Coëfficienten in die absoluten Werthe, wenn die Grunddimension $= 1$ gesetzt ist, überzutragen.

In der Fig. 2. sind die achtzehn verschiedenen Werthe, welche einer und derselben Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ in den verschiedenen Richtungen zukommen, die senkrecht sind auf $\boxed{a' : z . a'' : \infty a'''}$, $\boxed{z . a' : a'' : \infty a'''}$, $\boxed{a' : \infty a'' : z . a'''}$, $\boxed{z . a' : \infty a'' : a'''}$, $\boxed{\infty a' : a'' : z . a'''}$, $\boxed{\infty a' : z . a'' : a'''}$; ferner auf $\boxed{a' : -z . a'' : \infty a'''}$, $\boxed{-z . a' : a'' : \infty a'''}$ u. s. f., die letzteren positiv oder negativ genommen, an den entsprechenden Stellen in den Seiten des Dreiecks und deren Verlängerungen geschrieben.

Der Beweis für die Richtigkeit des Schema's ist dieser:

Es sei in Fig. 3. C der Mittelpunkt unsrer Construction; Ca und Cb zwei halbe Axen des Octaëders, also ab die Kante des Octaëders, dessen Mittelpunkt C ist. Es sei $CF = z . Cb = z . Ca$, also aF der Durchschnitt einer Fläche $\boxed{a : z . a : \infty a}$ mit der Ebne Cab; so ist Ct, aus C senkrecht auf aF, zugleich senkrecht auf der Ebne $\boxed{a : z . a : \infty a}$, also eine der auf den Flächen des Pyramidenwürfels $\boxed{a : z . a : \infty a}$ senkrechten Dimensionen. Wir fragen zuerst: in welchem Punkte o schneidet diese Dimension die Octaëderkante ab? und welches ist der Werth von Co, d. i. der Einheit dieser neuen Dimension für das Octaëder, dessen halbe Axe $Ca = 1$? So haben wir $at : tF = a^2 : z^2 a^2 = 1 : z^2$ und nach unserm Lehrsatz

$$ao : ob = at . CF : tF . Cb = 1 . z : z^2 . 1 = 1 : z$$
$$ao : ob = 1 : z$$

wodurch der Punkt o bestimmt ist.

So wie nun $ob = \frac{z}{z+1}\, ab$, und $ao = \frac{1}{z+1}\, ab$,

so ist auch $Ch = \frac{z}{z+1}\, Ca$, und $ho = \frac{1}{z+1}\, Ca$; folglich

$$Co = \sqrt{(Ch)^2 + (ho)^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$$

Die Einheit der neuen Dimension ist also im Octaëder $= \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$, wie wir oben sagten.

Es sei nun eine Fläche gegeben $= \boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ mit beliebigen Werthen in den drei Grunddimensionen; ihr Werth in Ca sei $\frac{1}{m}\ Ca$; in Cb, $\frac{1}{n}\ Cb$. Wir legen sie durch den Endpunkt a der ersteren, so dafs ag ihr Durchschnitt mit der Ebne Cab ist; so ist $Cg = \frac{m}{n}\ Cb$, $gb = \left(1 - \frac{m}{n}\right) Cb = \frac{n-m}{n}\ Cb$, also $Cg : gb = m : n - m$ und wir haben nach unserm Lehrsatze $o : o + p = f\,(a + b) : ea + f\,(a + b)$ in Fig. 3., $Cr : Co = Cg\,.\,ab : gb\,.\,ao + Cg\,.\,ab =$

$$m\,.\,(z+1) : (n-m)\,1 + m\,(z+1) = m\,(z+1) : n\,.\,1 + m\,.\,z$$

$$Cr = \frac{m\,(z+1)}{n\,.\,1 + m\,.\,z}\ Co$$

Aber Cr ist der Werth in der Dimension Co, welcher der Fläche $\boxed{a : \frac{m}{n}a : \frac{m}{p}a}$, d.i. der obengenannten Fläche, durch den Endpunkt des ersten a in der Einheit gelegt, zukommt; der entsprechende Werth für die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ also ist $\frac{1}{m}\,.\,Cr = \frac{z+1}{n\,.\,1 + m\,.\,z}\ Co$.

Mit z ist, wie wir sehen, im Nenner des Bruchs der Divisor desjenigen a der gegebenen Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ zu multipliciren, welches in der Fläche $\boxed{a : z\,.\,a : \infty a}$ in der Einheit angenommen wurde, und senkrecht war auf dem, worin die letztere mit $z\,.\,a$ genommen wurde; mit 1 umgekehrt der Divisor desjenigen, welches für die Fläche $\boxed{a : z\,.\,a : \infty a}$ als $z\,.\,a$ genommen wurde, und senkrecht war auf jenem, in welchem für sie $1\,.\,a$ genommen war.

Setzen wir nun für unser Schema, Fig. 2. in der Formel des Coëfficienten $\frac{z+1}{n\,.\,1 + m\,.\,z}$ für m, 1, für n unverändert n, d.i. statt der Form $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ unser gewöhnliches Zeichen $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ (also n' für p), so wird der Coëfficient $= \frac{z+1}{z+n}$, wie an der Stelle unsres Schema, welcher die Pyramidenwürfelfläche $\boxed{a : z\,.\,a : \infty a}$ entspricht, der in dem ersten a, $1a$, während ihr in der Richtung des $\frac{1}{n}\ a$, $z.a$ zukommt. Wir unterscheiden also die drei a, so ist für den gegenwärtigen

Fall der gefundene Coëfficient der, welcher der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : z \,.\, a'' : \infty a'''}$ zukommt.

Setzen wir umgekehrt in dem allgemeinen Coëfficienten für m, das n unsrer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$, und für n, 1, so wird der Coëfficient $= \frac{z+1}{1+nz} = \frac{z+1}{nz+1}$, wie an der Stelle unsers Schema's, welche der Pyramidenwürfelfläche mit $z \,.\, a$ im ersten a, und mit $1 \,.\, a$ im zweiten unsrer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ gehört; oder der gefundene Coëfficient ist der der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{z \,.\, a' : a'' : \infty a'''}$ zukommende.

Setzen wir für m wiederum n, und für n unser n', so haben wir $\frac{z+1}{nz+n'}$; und dieser Coëfficient gehört der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\infty a' : a'' : z \,.\, a'''}$. Oder setzen wir für m unser n', für n ungeändert n, so erhalten wir $\frac{z+1}{n'z+n}$, als den Coëfficienten für die Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\infty a' : z \,.\, a'' : a'''}$. Man sieht diese Werthe in unserm Schema an den correspondirenden Stellen.

Ist die Rede von einer Dimension, senkrecht auf der Fläche $\boxed{-a' : z \,.\, a'' : \infty a'''}$ und dem Werthe, welcher der gegebnen Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in dieser Dimension zukommt, so wird z mit dem Divisor des ersten a im letzteren Zeichen, d.i. mit 1, das n oder der Divisor des zweiten a aber mit -1 zu multipliciren sein. Im Coëfficienten $\frac{z+1}{n \,.\, 1 + m \,.\, z}$ wird also $n \,.\, 1$ zu $-n$, und $m \,.\, z$ zu z; er wird also zu $\frac{z+1}{z-n}$.

Ist die Rede von der Dimension senkrecht auf $\boxed{-z \,.\, a' : a'' : \infty a'''}$, so ist $-z$ mit n zu multipliciren oder im allgemeinen Coëfficienten für mz zu setzen $-nz$, für $n \,.\, 1$ aber 1. Der Coëfficient also, der für die Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z \,.\, a' : a'' : \infty a'''}$ gilt, ist $\frac{z+1}{1-nz}$.

Da die beiden Gröfsen $z-n$ und $1-nz$ negativ sein können, d.i. die Werthe der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in den Dimensionen senkrecht auf $\boxed{-a' : z'' : \infty a'''}$ oder $\boxed{-z \,.\, a' : a'' : \infty a'''}$ in umgekehrten Richtungen Statt finden können, so unterscheidet unser Schema, wie das frühere, diese umgekehrte Lage eines solchen Werthes durch die dersel-

ben Dimension auf der Verlängerung einer Seite des Dreiecks nach entgegengesetzter Richtung zukommenden zwei entgegengesetzten Stellen; an der einen ist der Divisor des Coëfficienten der oben geschriebene, an der andern sein entgegengesetzter $n - z$ oder $nz - 1$. Der erstere, d. i. der oben geschriebene, wird der Seite angehören, wo das erste a positiven Werth hat, der umgekehrte der, wo das erste a im negativen Werthe genommen ist, oder deren Stellen Richtungen bezeichnen, welche zwischen dem zweiten a im positiven Sinne, und dem Negativen des ersten liegen.

Dieselben Betrachtungen, welche anstatt der für die einzelnen Fälle angepafsten geometrischen Constructionen dienen, wiederholen sich in Bezug auf alle übrigen Stellen, die unser Schema in den Seiten des Dreiecks und ihren Verlängerungen angiebt. Die gegenseitige Lage je zweier Stellen für die zwischen denselben zwei Grunddimensionen liegenden, je nachdem nemlich eine bestimmte von beiden der einen Grunddimension näher liegt, oder der andern, entspricht der Lage der Dimensionen im Raume selbst unter der Voraussetzung, dafs $z > 1$. Nähme man $z < 1$, so würden die entsprechenden Stellen mit ihren Coëfficienten ihre Lage je zwei vertauschen, so wie in dem Fall $z = 1$ sie je zwei in Eins zusammen fallen.

§. 2.

Die Flächen der Pyramidenwürfel gehören bekanntlich der Kantenzone des Würfels. Wir wenden uns jetzt zur Entwicklung der Werthe, welche der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ in solchen Richtungen zukommen, welche senkrecht sind auf Flächen aus der Hauptzone des Octaëders, d. i. der Ecken- oder Diagonalzone des Würfels.

Es werden also die jetzt zu untersuchenden Dimensionen senkrecht sein auf den Flächen der Leucitoïde mit Inbegriff des Leucitoëders, oder auf den Flächen der Pyramiden-Octaëder, je nachdem sie liegen zwischen den Grunddimensionen und einer kleinsten Octaëderdimension, oder zwischen einer kleinsten und einer mittleren, die auf

ihnen senkrechten Flächen also zwischen einer Würfelfläche und Octaëderfläche, oder zwischen einer Octaëder- und Granatoëderfläche. Die allgemeine Eigenschaft einer Fläche aus der Hauptzone des Octaëders ist, dafs in zwei unsrer Grunddimensionen ihr gleiche Werthe zukommen, was wir im allgemeinen ausdrücken können mit der Form $\boxed{z.a:z.a:a}$. Ist $z > 1$, so haben wir Leucitoïdflächen; ist $z < 1$, Pyramidenoctaëderflächen. Der Fall $z = 1$ ist der des Octaëders selbst, als die Mitte zwischen jenen beiden Abtheilungen. Die Grenzglieder wären $z = \infty$, d. i. die Würfelfläche, oder $z = \frac{1}{\infty}$, die Granatoëderfläche. So war im vorigen die allgemeine Eigenschaft einer Pyramidenwürfelfläche $\boxed{a:z.a:\infty a}$ der Parallelismus mit einer der Grunddimensionen, oder ∞ als Coëfficient von einer derselben; die Mitte $z = 1$ war der Fall des Granatoëders, die beiden Endglieder $z = \infty$ und $z = 0$ beidemal der Fall des Würfels; und man wird nicht allein auch diese Grenzfälle in den Formeln unsers Schema's mit begriffen, sondern auch bei der nähern Vergleichung bestätigt finden, was wir vorhin von dem Tausch der Stellen sagten, wenn z, was wir > 1 annehmen, < 1 gesetzt wird.

Die Fig. 2. enthält neben den vorigen Werthen zugleich die (21) neuen, welche einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ in den zwölf gleichartigen Dimensionen senkrecht auf beliebigen Flächen der Hauptzone des Octaëders zukommen, drei derselben innerhalb des Dreiecks, deren negative Werthe ausgeschlossen sind, wenn die Werthe in den Grunddimensionen positiv gegeben waren, die neun übrigen mit den negativen Werthen derselben, wie bald die einen, bald die andern der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zugehören können, an entsprechenden, sich entgegengesetzten Stellen aufserhalb des Dreiecks in den sechs, durch die verlängerten Seiten gesonderten Räumen. Die einundzwanzig neuen Werthe sind sogleich kenntlich durch ihren gemeinschaftlichen Zähler $z + 2$, welcher sie wieder, wie die vorigen der Zähler $z + 1$, auszeichnet. Die Stellen, die wir ihnen geben, entsprechen wieder der Voraussezung $z > 1$ in der Fläche $\boxed{z.a:z.a:a}$, in deren Normalen die der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zugehörigen Stücke bestimmt werden sollen; und so entspricht diese

Voraussetzung dem Fall, dafs es Leucitoïde sind, denen die Flächen $\boxed{z.a:z.a:a}$ angehören; es sind daher die nemlichen Stellen, die wir für die Werthe in den Richtungen senkrecht auf den Flächen des Leucitoëders selbst, d.i. auf den Flächen $\boxed{2a:2a:a}$ in dem Schema der früheren Abhandlung, S. 300. mit den Coëfficienten bezeichnet haben, welche den gemeinschaftlichen Zähler 4 hatten. Wenn $z=1$ wird, so ist es die Octaëderfläche $\boxed{a:a:a}$, von deren Normalen die Rede ist; der Coëfficient bekommt zum Zähler 3, wie in den früheren Schemen die Coëfficienten der auf den Octaëderflächen senkrechten, d. i. der kleinsten Octaëderdimensionen; und je drei unserer neuen Coëfficienten mit den Zählern $z+2$ fallen dann in Eins zusammen.

Wird $z<1$, sind es also Pyramidenoctaëderflächen, in deren Normalen die der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zugehörigen Stücke bestimmt werden sollen, so rückt die in dem Schema einer jeden derselben gebührende Stelle über den Punkt, wo je drei zusammenfielen, nach der entgegengesetzten Seite hinüber, und die drei innerhalb des Dreiecks z.B. liegenden Werthe bilden in demselben ein umgekehrtes, mit den Spitzen gegen die Seiten des grofsen gerichtetes Dreieck, statt dafs in unserm Schema es ein gleichförmig in das grofse eingeschriebenes Dreieck ist, welches ihre Stellen unter sich bilden. Von je dreien in einem Ausschnitt aufserhalb des Dreiecks geschriebenen Coëfficienten mit den Zählern $z+2$ gilt ganz das analoge; sie fallen auch je drei in Einen Punkt und Einen Werth zusammen, wenn $z=1$ ist, und treten in entgegengesetzten Richtungen wieder auseinander, wenn $z<1$ wird.

In den Nennern der Coëfficienten sieht man im Schema auch die gewohnte Einfachheit, und zwar mit z immer den Divisor derjenigen Grunddimension für $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ multiplicirt, welche dem geschriebenen Coëfficienten am nächsten liegt, die beiden andern Divisoren unverändert oder mit 1 multiplicirt; die Summe der so multiplicirten Divisoren aber macht den Nenner des Coëfficienten aus. Die gröfseren Ausschnitte haben zu ihren Grenzen zwei Grunddimensionen in den positiven Werthen des Dreiecks, die dritte im negativen Werth, die Grenze des Aus-

schnitts im Unendlichen bildend. Die kleineren Ausschnitte haben zu ihren Grenzen eine der Grunddimensionen des Dreiecks in positivem Sinn, beide andre im negativen in den Verlängerungen der einschliefsenden Seiten im Unendlichen liegend. Welche Grunddimensionen zur Bildung des einen oder des andern Ausschnittes in negativem Werthe concurriren, diese gehen überall in demselben negativen Werthe auch in den Nenner des Coëfficienten ein, multiplicirt, wie vorhin, mit denselben Factoren.

Die Einheit in der neuen Dimension, womit die Coëfficienten sammt und sonders wieder zu multipliciren sind, ist abermals die dem Octaëder zukommende, also die Linie aus dem Mittelpunkt des Octaëders nach demjenigen Punkte der Oberfläche des Octaëders gezogen, in welchem dieselbe von der neuen Dimension geschnitten wird. Diese Linie λ, ausgedrückt in der Einheit des ganzen Systems, d. i. die halbe Octaëderaxe $= 1$ gesetzt, erhält den Ausdruck

$$\lambda = \frac{\sqrt{z^2 + 2}}{z + 2}$$

und so verwandeln sich wiederum alle neuen Coëfficienten in ihre wahren Werthe, die halbe Octaëderaxe $= 1$, wenn statt ihrer gemeinschaftlichen Zähler $z + 2$ gesetzt wird $\sqrt{z^2 + 2}$. In dem Schema für die auf den Leucitflächen senkrechten Dimensionen (wo $z = 2$) war der so in die absoluten Werthe übersetzte gemeinschaftliche Zähler $\sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6}$, und die Einheit in der entsprechenden Octaëderdimension war $\frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Wir ziehen es indefs wiederum vor, in dem Schema die Coëfficienten als solche zu schreiben, da $z + 2$ für diesen Zweck ein kürzerer und bequemerer Werth ist als $\sqrt{z^2 + 2}$.

Der Beweis für die Richtigkeit der angegebnen Werthe ist wieder eben so einfach als im vorigen Fall.

Es sei in *Cad*, Fig. 4. *Ca* eine Linie aus dem Mittelpunkt *C* unsrer Construction oder des Octaëders nach der Ecke desselben, also $Ca =$ einer halben Octaëderaxe $= a = 1$; *d* sei die Mitte einer Octaëderkante, welche die Endpunkte der beiden andern Grunddimensionen *a* verbindet; also $Cd = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; so wird eine Fläche $\boxed{z . a : z . a : a}$ durch *aF*

gehen, wenn $FC = z \,.\, Cd$, Cd aber die zwischen $z.a$ und $z.a$ liegende mittlere Octaëderdimension ist. Die Linie Ct senkrecht auf aF gezogen, steht dann auch senkrecht auf der Fläche $\boxed{z.a : z.a : a}$. Wir setzen wieder die erste Frage: welches ist der Punkt o in der Octaëderdiagonale ad, in welchem die letztere von der auf $\boxed{z.a : z.a : a}$ senkrechten Ct geschnitten wird? ferner: welches ist der Werth von Co, d. i. der Einheit in dieser Octaëderdimension? So ist fürs erste

$$at : tF = (Ca)^2 : (CF)^2 = 1 : \frac{z^2}{2} = 2 : z^2$$

ferner $Cd : CF = 1 : z$

und nach unserm Lehrsatz $o : p = i\,(a+b) : kb$

$$ao : od = at \,.\, CF : tF \,.\, CD = 2 \,.\, z : z^2 \,.\, 1 = 2 : z$$

also die Octaëderdiagonale getheilt im Verhältnifs $2 : z$

und $Co = \sqrt{(Ch)^2 + (ho)^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{z+2}\right)^2 + \left(\frac{2}{z+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{z^2+2}}{z+2}$

also die Einheit der neuen Dimension, wie oben gesagt war, $= \frac{\sqrt{z^2+2}}{z+2}$

Nun nehmen wir wieder statt der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ einen noch allgemeineren Ausdruck $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$, so dafs ihr in der Richtung Ca der Fig. 4. $\frac{1}{m}\,a$ zukomme. Wir legen sie durch den Endpunkt a der Linie Ca, d. i. wir nehmen sie in den Abständen vom Mittelpunkt $= \boxed{a : \frac{m}{n}a : \frac{m}{p}a}$, so kommt ihrem Durchschnitt ag mit der Ebne Cad der Werth $Cg = \frac{2m}{n+p}\,Cd$ in der mittleren Octaëderdimension Cd zu, wie aus dem früheren Schema einleuchtet; und

$$Cg : dg = \frac{2m}{n+p} : 1 - \frac{2m}{n+p} = 2m : n+p-2m.$$

Gesucht wird nun zunächst, wenn r der Durchschnitt von ag mit Ct ist, das Verhältnifs von Cr zu Co. Dieses giebt nach unserm Lehrsatz die Formel

$$o : o+p = f(a+b) : ea + f(a+b)$$

Demnach $Cr : Co = Cg \,.\, ad : dg \,.\, ao + Cg \,.\, ad =$

$$2m\,(z+2) : (n+p-2m)\,2 + 2m\,(z+2) = m\,(z+2) : n+p+mz$$

also $Cr = \frac{m\,(z+2)}{n+p+mz}\,Co$

Nun aber kommt der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ in der Dimension Ct nicht Cr, sondern $\frac{1}{m}Cr$, d. i. $\frac{z+2}{n+p+mz}\,Co$ zu.

Mit z wird im Nenner des Coëfficienten, wie man sieht, der Divisor derjenigen Grunddimension der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ multiplicirt, welche in gleicher Richtung genommen wurde mit der des $1\,a$ im Zeichen der Fläche $\boxed{z\,.\,a : z\,.\,a : a}$. Schreiben wir also mit Unterscheidung der a die erstere $\boxed{\frac{1}{m}a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{p}a'''}$, so ist es die Fläche $\boxed{z\,.\,a'' : z\,.\,a''' : a'}$ oder $\boxed{a' : z\,.\,a'' : z\,.\,a'''}$, in deren Normale ihr der Werth $\frac{z+2}{n+p+mz}\,Co$ zukommt. Und damit werden wir wieder die Regel der Entwickelung sämmtlicher Coëfficienten für den Werth der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in den Richtungen senkrecht auf $\boxed{a' : z\,.\,a'' : z\,.\,a'''}$, auf $\boxed{z\,.\,a' : a'' : z\,.\,a'''}$, $\boxed{z\,.\,a' : z\,.\,a'' : a'''}$, $\boxed{-a' : z\,.\,a'' : z\,.\,a'''}$ u. s. f. haben, ohne der speciellen Ausführung der geometrischen Constructionen für die Fälle der verschiedenen Combinationen zu bedürfen.

Genauer ausgedrückt, würde indeſs die Regel diese sein: Wir haben uns beide Flächen vorzustellen unter der Form $\boxed{\frac{1}{1}a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ und $\boxed{\frac{1}{z}a' : \frac{1}{1}a'' : \frac{1}{1}a'''}$ u. s. f., d. i. alle Dimensionsgröſsen unter der Form eines Bruches mit dem Zähler 1 geschrieben; so ist der Nenner des Coëfficienten die Summe der Produkte der beiderlei Nenner der gleichliegenden Dimensionen in den geschriebenen Flächen, mit dem Zeichen + oder —, als ebenfalls dem Produkte der Zeichen der nemlichen Dimensionen; der Zähler des Coëfficienten aber ist die Summe der Nenner der dreierlei Dimensionen der Fläche $\boxed{\frac{1}{z}a' : \frac{1}{1}a'' : \frac{1}{1}a'''}$ [1].

Es ist also der Coëfficient für $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : z\,.\,a'' : z\,.\,a'''} = \frac{z+2}{z+n+n'}$; denn es ist das obige $m = 1$, $n = n$, $p = n'$ gesetzt.

---

[1] So ausgedrückt, umfaſst auch die Regel den früheren Fall für die Dimensionen senkrecht auf den Pyramidenwürfelflächen; denn diese haben wir uns zu denken unter der Form $\boxed{\frac{1}{z}a' : \frac{1}{1}a'' : \frac{1}{0}a'''}$, so ist wieder der Zähler des Coëfficienten $= z + 1 + 0 = z + 1$, und der Nenner $= z\,.\,1 + 1\,.\,n + 0\,.\,n' = z + n$. u. s. f.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{z\,.\,a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist er $= \frac{z+2}{nz+n'+1}$; denn es ist statt des obigen m zu setzen n, statt n und p, n' und 1.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{z\,.\,a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist er $= \frac{z+2}{n'z+n+1}$; denn statt m ist zu setzen n', statt n und p, n und 1.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist der Coëfficient $= \frac{z+2}{n+n'-z}$, weil in der allgemeinen Formel desselben m zu 1 geworden, sein Produkt mit z aber mit dem Zeichen $-$ zu versehen ist, welches aus der Multiplication der Zeichen $+$ und $-$ hervorgeht, für n und p aber, n und n' gesetzt ist.

Wird dieser Coëfficient negativ, so gilt er in der umgekehrten Richtung, d. i. in der nemlichen Dimension, vom Mittelpunkt aus gerichtet gegen eine Fläche $\boxed{a^{\cdot} : z\,.-a^{\cdot\cdot} : z\,.-a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{\tfrac{1}{z}a^{\cdot} : -a^{\cdot\cdot} : -a^{\cdot\cdot\cdot}}$, welches Zeichen den Coëfficienten giebt $= \frac{z+2}{z-n-n'}$, da jetzt auch m zu 1, und n und p zu n und n' geworden, aber die beiden letzteren das Zeichen $-$, als das Produkt von $+$ mit $-$ tragen, während das Produkt $mz = 1\,.\,z$ das Zeichen $+$, als das Produkt von $+$ mit $+$ behält.

Unser Schema zeigt beide umgekehrte Werthe des Coëfficienten an den entsprechenden Stellen, nemlich den ersten in dem Ausschnitt zwischen $a^{\cdot\cdot}$, $a^{\cdot\cdot\cdot}$ und $-a^{\cdot}$, den zweiten in dem entgegengesetzten zwischen $a^{\cdot}$, $-a^{\cdot\cdot}$ und $-a^{\cdot\cdot\cdot}$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich der Coëfficient in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z\,.\,a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{-a^{\cdot} : \tfrac{1}{z}a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ als $\frac{z+2}{nz+n'-1}$, und für die umgekehrte Richtung gegen $\boxed{a^{\cdot} : -\tfrac{1}{z}a^{\cdot\cdot} : -a^{\cdot\cdot\cdot}}$ senkrecht, als $\frac{z+2}{1-nz-n'}$.

Eben so in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z\,.\,a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{-a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \tfrac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird der Coëfficient $\frac{z+2}{n'z+n-1}$; der umgekehrte in der gegen $\boxed{a^{\cdot} : -a^{\cdot\cdot} : -\tfrac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ senkrechten, $\frac{z+2}{1-n-n'z}$.

Und so alle übrige der Ordnung nach, wie sie im Schema Fig. 2. nach der Voraussetzung $z > 1$ gestellt sind.

§. 3.

Wir geben endlich unserm Schema die gröfseste Allgemeinheit, indem wir angeben, wie eine Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ jede andre Art von Dimensionen schneidet, senkrecht auf Flächen, die weder in der Hauptzone des Octaëders, noch in der Kantenzone des Würfels liegen, also weder Leucitoïdflächen noch Pyramidenoctaëder-, noch Pyramidenwürfelflächen angehören, sondern den Sechsmalachtflächnern oder Hexakisoctaëdern, welches bekanntlich die allgemeinste Form der von gleichartigen Flächen begrenzten Körper des sphäroëdrischen Systems war, die gleichartigen vollzählig, und in der Begrenzung des Körpers im Gleichgewicht unter sich genommen.

Wir geben der beliebigen Fläche des Systems, in deren Normale der einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zukommende Werth allgemein bestimmt werden soll, den Ausdruck $\boxed{a:\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}a}$; sie wird einen Sechsmalachtflächner geben, wenn y und z endliche Gröfsen, verschieden von einander und verschieden von 1 sind. Fällt eine oder mehrere dieser Bedingungen weg, so reducirt sich der Sechsmalachtflächner auf einen der durch das Zusammenfallen mehrerer Flächen entstehenden Körper mit vierundzwanzig, zwölf, acht oder sechs Flächen.

Das Maximum der Anzahl gleichartiger Dimensionen ist also 24, in welchen wieder entgegengesetzte Richtungen oder Hälften zu unterscheiden sind. Die entgegengesetzten von sechs werden wieder von den Werthen, welche einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zukommen können, ausgeschlossen, nemlich von denen, welche gegen Flächen gekehrt sind, in deren Zeichen $\boxed{a:\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}a}$ die Werthe von a in gleichem positivem Sinn verstanden sind, wie für die Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$. Diese sechs jederzeit in positivem Sinne der letzteren Fläche zugehörigen Werthe in sechs der zu untersuchenden Dimensionen zeigt unser Schema innerhalb des Dreiecks; von den übrigen achtzehn gleichartigen Dimensionen können der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ Werthe bald in positivem bald in negativem Sinn zukommen. Die sechsunddreifsig daraus entspringenden Gröfsen vertheilen sich je sechs in die sechs Ausschnitte aufserhalb des Dreiecks, und

folgen in der Lage ihrer Stellen einer eben so festen Ordnung im Schema, wie die zu unterscheidenden Dimensionen mit ihren entgegengesetzten Richtungen im Raume selbst. Unser Schema besitzt also wieder zweiundvierzig für die zu unterscheidenden zweiundvierzig Werthe geeignete Stellen; es sind im allgemeinen die Räume zwischen je drei benachbarten, einer kleinsten, einer mittleren und einer gröfsten Octaëderdimension, so wie die neuen Dimensionen zwischen je drei solchen liegen. Die Formeln für die verschiedenen Coëfficienten sind, wie die Fig. 5. sie darstellt, in der That von ähnlicher Einfachheit, wie die vorigen; ja aus der vorhin ausgesprochenen Regel fliefsen sie wirklich sammt und sonders. Die Zähler sind wieder allen gemeinschaftlich $= y + z + 1 =$ der Summe der Nenner in den als Brüche mit dem Zähler 1 geschriebenen dreierlei Werthen in den Grunddimensionen für die Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$; die Nenner sind die Summen der Produkte der Nenner von den Werthen der beiderlei nach derselben Regel geschriebenen Flächen $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ und $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ in denselben Grunddimensionen, die zugehörigen positiven oder negativen Zeichen gleichfalls mit einander multiplicirt, und das daraus sich ergebende Zeichen, dem Produkt zu welchem sie gehören, beigefügt. Wenn also die beiden so eben geschriebenen Flächen in gleicher Folge der a zu verstehen sind, so ist der Coëfficient $\frac{y + z + 1}{ny + n'z + 1}$ u. s. f.

Die Einheit χ in der neuen Dimension aber, wiederum am Octaëder als die Linie aus dem Mittelpunkt nach demjenigen Punkt der Oberfläche gezogen, in welchem dieselbe von der auf $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ senkrechten Richtung geschnitten wird, findet sich in der Einheit derselben Octaëderaxe wiederum ausgedrückt

$$\chi = \frac{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}{y + z + 1}$$

so dafs abermals der Coëfficient, wenn sein gemeinschaftlicher Zähler $y + z + 1$ mit $\sqrt{y^2 + z^2 + 1}$ vertauscht wird, in den absoluten Werth der zu bezeichnenden Gröfse in der allgemeinen Einheit des Systemes übergetragen ist.

Es wird jedoch nöthig sein, von der Richtigkeit der oben ausgesprochenen Formeln noch besondere Rechenschaft zu geben.

Es sei also in Fig. 6. $Cy = \frac{1}{y}\,CA = \frac{1}{y}\,a$; $Cz = \frac{1}{z}\,CB = \frac{1}{z}\,a$, und yz die Linie, welche einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ in der Ebne CAB zukommt, wenn sie in der auf dieser Ebne in C (als dem Mittelpunkt der Construction) senkrechten Richtung durch einen Punkt geht, der um $1a$ von C absteht, während CA und CB die beiden andern Grunddimensionen a, a, folglich AB eine Octaëderkante bezeichnet. Wir fällen das Perpendikel Cp aus C senkrecht auf yz, und verlängern es, bis es die Octaëderkante AB in D schneidet; so wird in einer durch CpD und die auf CAB in C senkrechte Linie gelegten Ebne die auf $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ senkrechte Richtung liegen; und wenn in Fig. 7. CpD die vorige Linie, OC aber die auf CAB in C senkrechte Grunddimension a ist, so wird Op der Durchschnitt von $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ mit OCD, OD aber eine von O nach D in der Octaëderfläche ABO gezogene Linie sein; und das Perpendikel Ct aus C auf Op, verlängert nach F, als dem Durchschnitt mit OD, wird die auf $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ senkrechte Dimension, und CF die Einheit derselben für das Octaëder sein, dessen halbe Axe $= OC$ ist.

Um zuvörderst den Punkt D, oder das Verhältnifs $AD : DB$ in der durch CpD getheilten Octaëderkante zu kennen, ziehen wir in Fig. 6. aus A die Linie $A\vartheta$ parallel mit yz; sie schneide die Linie CD in r; so ist $C\vartheta = \frac{y}{z}CB$, oder $C\vartheta : CB = y : z$; ferner

$$Ar : r\vartheta = yp : pz = (Cy)^2 : (Cz)^2 = \frac{1}{y^2} : \frac{1}{z^2} = z^2 : y^2$$

und nach der Formel $a : b = uf : v(e+f)$ ist

$$AD : DB = Ar \,.\, C\vartheta : r\vartheta \,.\, CB = z^2 y : y^2 z = z : y = Cy : Cz$$

ferner ist nach der Formel $o : o + p = f(a+b) : ea + f(a+b)$

$$Cr : CD = C\vartheta . AB : \vartheta B . AD + C\vartheta . AB = y(y+z) : (z-y)z + y(y+z) = y(y+z) : z^2 + y^2$$

also $Cr = \frac{y(y+z)}{y^2+z^2}\,CD$

Aber $Cp = \frac{1}{y}\,Cr = \frac{y+z}{y^2+z^2}\,CD$

mithin $Cp : CD = y + z : y^2 + z^2$

$$Cp = \frac{\frac{a}{y} \cdot \frac{a}{z}}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + \frac{a^2}{z^2}}} = \frac{a}{yz\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

Daher ist CD, in der Einheit der Grunddimension a ausgedrückt,

$$CD = \frac{y^2 + z^2}{y + z}\ Cp = \frac{a\sqrt{y^2 + z^2}}{y + z}$$

Suchen wir jetzt in Fig. 7. den Punkt F in der Linie OD auf der Octaëderfläche ABO, so ist fürs erste

$$Ot : tp = (CO)^2 : (Cp)^2 = a^2 : \frac{a^2}{y^2 + z^2} = y^2 + z^2 : 1$$

und nach der Formel $a : b = z\,(i + k) : yi$, oder $b : a = yi : z\,(i + k)$ ist $OF : FD = Ot \,.\, Cp : tp \,.\, CD = (y^2 + z^2)\ (y + z) : 1 \,.\, (y^2 + z^2) = y + z : 1$; und suchen wir die Einheit der neuen Octaëderdimension CF, so ist nach der Formel $o : o + p = i(a + b) : kb + i(a + b)$

$$Ct : CF = Cp \,.\, OD : pD \,.\, OF + Cp \,.\, OD =$$

$$(y + z)\ (y + z + 1) : (y^2 + z^2 - (y + z))\ (y + z) + (y + z)\ (y + z + 1) =$$

$$y + z + 1 : (y^2 + z^2 - y - z) + y + z + 1 = y + z + 1 : y^2 + z^2 + 1$$

also
$$CF = \frac{y^2 + z^2 + 1}{y + z + 1}\ Ct$$

Aber
$$Ct = \frac{CO \,.\, Cp}{\sqrt{(CO)^2 + (Cp)^2}} = \frac{a \,.\, \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{y^2 + z^2}}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}$$

folglich die Einheit in der neuen Octaëderdimension CF oder χ, wie oben angeführt war,

$$CF = \chi = \frac{a\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}{y + z + 1}$$

Wir suchen aber nunmehr den Werth Cx Fig. 9, welchen eine durch Os gehende Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ von der Richtung CF, von C aus gemessen, abschneidet. Wir substituiren dieser Fläche, um das allgemeinere Gesetz jenes Werthes deutlicher zu machen, den noch allgemeineren Ausdruck $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$, so dafs wir das $\frac{1}{p}a$ derselben in der Richtung des $1a$ der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$, also in der Richtung

CO, das $\frac{1}{n}a$ in der Richtung des $\frac{1}{y}a$, also in CA, Fig. 6 und 8., und das $\frac{1}{m}a$ in der Richtung des $\frac{1}{z}a$, d. i. in CB, Fig. 6 und 8. nehmen. Wir legen die Fläche $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ durch den Endpunkt O der ersten Grunddimension CO, also in die Lage $\boxed{a : \frac{p}{n}a : \frac{p}{m}a}$, so wird sie von den Linien CA und CB, Fig. 8. Stücke abschneiden

$$Cn = \frac{p}{n}\,CA, \text{ und } Cm = \frac{p}{m}\,CB.$$

Der Durchschnitt der Linie nm mit CD, welches die vorige Bedeutung behält, sei s. Wir ziehen Aq parallel mit nm; der Durchschnitt von Aq mit CD sei u; so ist $Cq = \frac{n}{p} \,.\, Cm = \frac{n}{m}\,CB$, und

$$Cq : qB = \frac{n}{m} : 1 - \frac{n}{m} = n : m - n$$

ferner ist nach der Formel $o : o + p = f(a+b) : ea + f(a+b)$

$$Cu : CD = Cq\,.\,AB : qB\,.\,AD + Cq\,.\,AB = n(y+z) : (m-n)\,z + n\,(y+z) =$$
$$n\,(y+z) : mz + ny$$

also $$Cu = \frac{n(y+z)}{mz+ny}\,CD$$

Aber $$Cs = \frac{p}{n}\,Cu = \frac{p(y+z)}{ny+mz}\,CD$$

Wenn nun in Fig. 9. $Cs : CD = p(y+z) : ny + mz$, oder
$Cs : sD = p(y+z) : ny + mz - p(y+z)$, so ist
nach der Formel $o : o + p = i(a+b) : kb + i(a+b)$

$$Cx : CF = Cs\,.\,OD : sD\,.\,OF + Cs\,.\,OD =$$
$$p(y+z)\,(y+z+1) : (ny+mz-py-pz)\,(y+z) + p\,(y+z)\,(y+z+1) =$$
$$p\,(y+z+1) : ny + mz + p\,.\,1$$

also $$Cx = \frac{p\,(y+z+1)}{ny+mz+p\,.\,1}\,CF$$

Aber Cx war das Stück, das auf CF durch $\boxed{a : \frac{p}{n}a : \frac{p}{m}a}$ abgeschnitten wurde; folglich ist das Stück, welches durch $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ abgeschnitten wird,

$= \frac{1}{p}\ Cx = \frac{y+z+1}{ny+mz+p.1}\ CF = \frac{a\sqrt{y^2+z^2+1}}{ny+mz+p.1} = \frac{\sqrt{y^2+z^2+1}}{ny+mz+p.1}$,
wenn $a = 1$ gesetzt wird.

So sehen wir also wiederum, dafs in dem Coëfficienten $\frac{y+z+1}{ny+mz+p.1}$ der Zähler die Summe der Nenner ist von den einzelnen Werthen in $\boxed{\frac{1}{1}a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$, während der Nenner des Coëfficienten die Summe ist von den Produkten der Nenner in den Ausdrücken beider Flächen, $\boxed{\frac{1}{1}a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ und $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$, jede so geschrieben, dafs die Dimensionswerthe Brüche sind mit dem Zähler 1, und je zwei Nenner mit einander multiplicirt, welche den in gleicher Richtung genommenen Dimensionswerthen der beiderlei Flächen zukommen. Fügen wir noch hinzu, dafs diese Nenner zugleich die positiven oder negativen Zeichen der Dimensionswerthe tragen, denen sie angehören, so haben wir die Regel für die Bildung der sämmtlichen zweiundvierzig Coëfficienten, welche wieder nur die verschiedenen möglichen Combinationen von n, m, p, mit $\pm 1, y, z$ enthalten und, wie immer, erschöpfen.

Kehren wir also zurück zu unserm von Anfang gewählten Ausdruck einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$, setzen wir sie an die Stelle der vorigen $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ und unterscheiden wir ihre verschiednen a, die sie bald mit den einen, bald mit den andern a einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ in gemeinschaftlicher Richtung hat, so ist für $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : \frac{1}{y}a'' : \frac{1}{z}a'''}$, χ als Einheit dieser Dimension genommen, der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{ny+n'z+1.1}$; denn es wurde für p, 1, für m, n' gesetzt, n aber in der vorigen Bedeutung des allgemeinen Coëfficienten gelassen.

So wird für $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : \frac{1}{z}a'' : \frac{1}{y}a'''}$ der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{nz+n'y+1.1}$; denn n steht für m, n' für n, 1 für p.

So wird ferner für $\boxed{a' : \frac{1}{n}a'' : \frac{1}{n'}a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a' : a'' : \frac{1}{z}a'''}$ der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{1.y+n.1+n'z}$; in der senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a' : \frac{1}{z}a'' : a'''}$ wird er $= \frac{y+z+1}{1.y+nz+n'.1}$;

senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird er $= \frac{y+z+1}{1.z+n.1+n'.y}$;
und senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird er $= \frac{y+z+1}{1.z+n.y+n'.1}$;
wie diese Coëfficienten in der Fig. 5. an den innerhalb des Dreiecks fallenden Stellen sich finden, durch welche Richtungen bezeichnet werden, die zwischen $+a^{\cdot}$, $+a^{\cdot\cdot}$ und $+a^{\cdot\cdot\cdot}$ liegen.

Was die zwischen $-a^{\cdot}$, oder $-a^{\cdot\cdot}$, $-a^{\cdot\cdot\cdot}$ und eine oder zwei $+a$.... fallenden Richtungen betrift, so ist der der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in Bezug auf sie zukommende Coëfficient auch klar durch das vorige bestimmt; er wird, wie man sieht, wenn die Rede ist von der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ kein andrer sein, als $\frac{y+z+1}{-1+n.y+n'z}$ u.s.f.

Die Stellen, welche den einzelnen Coëfficienten in unserm Schema gebühren, werden im allgemeinen abhängig sein von der Relation der Werthe, welche man den Gröfsen 1, n und n'; 1, y und z giebt. Wenn wir setzen $n' > n > 1$, wie wir in den früheren Schemen gethan haben, so liegt die Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ dem Mittelpunkt der Construction am nächsten in dem Raume, welcher in unserm Dreieck eingeschlossen ist zwischen dem Mittelpunkt desselben, der Mitte der Seite zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$, und der mit $\frac{1}{n'}$ bezeichneten Ecke. Der Coëfficient, welcher in diesem Raume steht, mufs also unter jener Voraussetzung immer der kleinste, sein Nenner folglich der gröfste sein. Dies ist für die Summe der drei Produkte von drei gegebnen Gröfsen 1, n, n', mit einer anderen von drei gegebenen anderen 1, y, z nur dann der Fall, wenn die gröfsten mit den gröfsten, die mittleren mit den mittleren, die kleinsten mit den kleinsten multiplicirt werden.

Setzen wir also $z > y > 1$, so ist die Summe der Produkte die gröfseste von $n'z + ny + 1.1$. Es gehört also unter dieser Voraussetzung an die genannte Stelle in unserm Dreieck der Coëfficient $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$. Dies ist aber die Formel für den Coëfficienten, welcher der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt; und es ist klar, dafs an dieser Stelle der kleinste Coëfficient liegen mufs, wenn für die Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ die kleinsten, mittleren und gröfsesten

Werthe in den Grunddimensionen in derselben Folge liegen, wie in der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$.

Die übrigen Stellen, und welche Coëfficienten ihnen angehören, folgt der Bestimmung der ersten. In dem Ausschnitt zwischen dem Mittelpunkt des Dreiecks, der Mitte zwischen 1 und $\frac{1}{n'}$, und der Ecke $\frac{1}{n'}$ mufs der Coëfficient zu stehen kommen, welcher der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf derjenigen Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$, welche mit der vorigen $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ gemein behält das $a^{\cdot\cdot\cdot}$, und vertauscht das $a^{\cdot}$ und $a^{\cdot\cdot}$, also auf $\boxed{\frac{1}{y} a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$; für diese Richtung aber ist der Coëfficient $\frac{z+y+1}{n'z+1 \, . \, y+n \, . \, 1}$.

Die beiden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ und $\frac{z+y+1}{n'z+y+n}$ werden gleich oder fallen in Einen zusammen, wenn $y = 1$; und ihr gemeinschaftlicher Ausdruck wird $\frac{z+2}{n'z+n+1}$, wie in Fig. 2. Dort aber war es der des Coëfficienten für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{z \, . \, a^{\cdot} : z \, . \, a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$, auf welchen letzteren Ausdruck sich jetzt die Fläche $\boxed{\frac{1}{y} a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ reducirt, wenn $y = 1$.

Ferner mufs in dem Ausschnitt zwischen dem Mittelpunkt des Dreiecks, der Ecke $\frac{1}{n}$, und der Mitte zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$ derjenige Coëfficient stehen, welcher der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$, die mit der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ vertauscht ihr $a^{\cdot\cdot}$ und $a^{\cdot\cdot\cdot}$, und gemeinschaftlich behält das $a^{\cdot}$, d. i. in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot\cdot}}$; wir wissen aber: für diese Richtung gilt der Coëfficient $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1 \, . \, 1}$. Dieser Coëfficient wird identisch mit dem ersten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, wenn $z = y$. Dies wird der Fall sein müssen, der sich auf eine Pyramiden-Octaëderfläche bezieht, wenn $z = y > 1$. Dafs auch dieser Fall mit dem in der Fig. 2. ihm correspondirenden Coëfficienten $\frac{z+2}{z+n+n'}$ stimmt, sehen wir leicht. Hier wurde die Fläche gedacht als $\boxed{a^{\cdot} : z \, . \, a^{\cdot\cdot} : z \, . \, a^{\cdot\cdot\cdot}}$, in unserm jetzigen als $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Setzen wir aber in den Werth $\frac{z+2}{z+n+n'}$, $\frac{1}{z}$ für z, so ist $\frac{\frac{1}{z}+2}{\frac{1}{z}+n+n'} = \frac{1+2z}{1+(n+n')z}$. Und wenn wir in den obigen zwei identisch werdenden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ und $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, nach der

Gleichung $z = y$, für y auch z schreiben, so verwandeln sich beide in $\frac{2z+1}{z(n'+n)+1} = \frac{1+2z}{1+(n+n')z}$.

Es ist einleuchtend, dafs alle sechs Coëfficienten im Innern des Dreiecks in Einen Werth zusammenfallen, wenn $z = y = 1$, d. i. im Fall es die Octaëderfläche wird, auf welcher die gesuchte Richtung senkrecht steht. Und dann reduciren sich die sechs Ausdrücke in den Einen, schon aus unsern frühern Schemen bekannten, $\frac{3}{n'+n+1}$.

Es ist nicht minder deutlich, dafs an der Stelle aufserhalb des Dreiecks, welche in der Linie von der Ecke $\frac{1}{n'}$ bis nach der Mitte zwischen $\frac{1}{n'}$ und $\frac{1}{n}$ an die erste bezeichnete Stelle grenzt, d. i. in dem Ausschnitt, welcher sich zwischen den bezeichneten zwei Punkten und einer Mitte zwischen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$ und -1 befindet, ein Coëfficient stehen mufs, der sich auf die Richtung bezieht senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$; denn die beiden letzteren Werthe mufs diese Fläche gemein haben mit der, auf welche der erste Coëfficient sich bezog, der für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ galt; den Werth in $a^{\cdot}$ aber mufs sie im negativen Sinn mit derselben gemein haben. Der Coëfficient aber, der der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$, ist $\frac{z+y+1}{n'z+ny-1.1}$.

Auch dieser Coëfficient wird mit dem ersten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ zusammenfallen, wenn in dem Ausdruck $\boxed{\frac{1}{1} a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ der Divisor des ersten a = Null wird, d. i. wenn die Rede ist von einer Richtung senkrecht auf einer Fläche $\boxed{\infty a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Man sieht, dafs dies die Fläche eines Pyramidenwürfels wäre, und dafs die beiden erwähnten Coëfficienten werden würden $= \frac{z+y}{n'z+ny}$. In Fig. 2. aber hiefs dieselbe Fläche $\boxed{\infty a^{\cdot} : z a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{\infty a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Setzen wir aber statt $\frac{1}{y}$ $a^{\cdot\cdot}$ im ersten Ausdruck $1 a^{\cdot\cdot}$, also für y, 1, so ist der Coëfficient $\frac{z+y}{n'z+ny} = \frac{z+1}{n'z+n}$, wie er in Fig. 2. hiefs.

Wir überzeugen uns eben so, dafs in dem benachbarten Ausschnitt links vom vorigen in unserm Schema, der Coëfficient stehen mufs, welcher sich bezieht auf die Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Dies giebt ihn $= \frac{z+y+1}{nz+n'y-1}$. Wiederum, wenn für 1, Null gesetzt, er also in den verwandelt wird, welcher sich auf die Pyramidenwürfel-

fläche $\boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{y} a'''}$ bezieht, so wird er mit dem in unserm Schema über ihm stehenden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ identisch, und beide zu $\frac{z+y}{nz+n'y}$. Dieser Ausdruck, verglichen mit dem ihm correspondirenden $\frac{z+1}{nz+n'}$ in Fig. 2. löset sich in denselben Werth auf, wenn die Fläche $\boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{y} a'''}$ auf denselben Ausdruck zurückgeführt wird, der ihr in Fig. 2. gegeben war, d. i. auf $\boxed{\infty a' : a'' : z a'''} = \boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : a'''}$, also wenn $y = 1$ gesetzt wird.

Alle vier Coëfficienten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$, $\frac{z+y+1}{n'z+ny-1}$ und $\frac{z+y+1}{nz+n'y-1}$ müssen in Einen Werth zusammenfallen, wenn $1=0$, und $z=y$ gesetzt wird. Die vier Flächen, auf welche sie sich beziehen, fallen dann zusammen in die Granatoëderfläche $\boxed{\infty a' : a'' : a'''} = \boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{z} a'''}$; der gemeinschaftliche Werth des Coëfficienten ist $= \frac{2z}{z(n'+n)} = \frac{2}{n'+n}$, wie er aus dem ersten Schema bekannt ist.

Nach diesen Regeln geht das Schema unsrer Fig. 5. aus der Voraussetzung $z > y > 1$ und $n' > n > 1$ hervor. Setzte man hingegen $y > z > 1$, während immer $n' > n > 1$, so tauschten je zwei Coëfficienten wie $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ und $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ ihre Stellen. Letzteres würde dann wiederum der kleinste sein, welcher, so lange $n' > n > 1$, immer an der nemlichen Stelle unsers Dreiecks stehen mufs. Nach den verschiedenen möglichen Voraussetzungen $z > y > 1$, $y > z > 1$, $y > 1 > z$, $z > 1 > y$, $1 > y > z$, $1 > z > y$ würden der Reihe nach alle die sechs Coëfficienten innerhalb unsers Dreiecks an die Stelle unsers $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ zu stehen kommen; und umgekehrt würde dieser Werth fortrücken in der so eben angefangenen Richtung nach der Reihe der Voraussetzungen $z > y > 1$, $y > z > 1$, $y > 1 > z$, $1 > y > z$, $1 > z > y$, und $z > 1 > y$.

§. 4.

Wir können ohne Schwierigkeit, was wir von dem sphäroëdrischen System hier entwickelt haben, auf die übrigen Systeme anwenden, welche auf drei unter einander rechtwinklichen, aber ungleichen Grunddimensionen beruhen. Wir setzen also die drei a verschieden, als a, b, c, und suchen die Werthe in den Richtungen senkrecht auf einer Fläche

$\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : 1c}$ für eine gegebene Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$. So ist, mit Beibehaltung ganz der vorigen Construction, in Fig. 6, $CA = a$, $CB = b$, $Cy = \frac{1}{y}a$, $Cz = \frac{1}{z}b$ und $Ar : r\vartheta = yp : pz = \frac{a^2}{y^2} : \frac{b^2}{z^2} = z^2a^2 : y^2b^2$; also

$$AD : DB = Ar . C\vartheta : r\vartheta . CB = z^2a^2 \frac{y}{z} : y^2b^2 . 1 = za^2 : yb^2$$

$$Cr : CD = C\vartheta . AB : \vartheta B . AD + C\vartheta . AB = \frac{y}{z}(za^2 + yb^2) : \left(1 - \frac{y}{z}\right) za^2 + \frac{y}{z}(za^2 + yb^2) = y(za^2 + yb^2) : z^2a^2 + y^2b^2$$

$$Cr = \frac{y(za^2 + yb^2)}{z^2a^2 + y^2b^2} CD$$

$$Cp = \frac{1}{y} Cr = \frac{za^2 + yb^2}{z^2a^2 + y^2b^2} CD;$$

aber auch $$Cp = \frac{ab}{yz\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + \frac{b^2}{z^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{z^2a^2 + y^2b^2}}$$

folglich $$CD = \frac{z^2a^2 + y^2b^2}{za^2 + yb^2} Cp = \frac{ab\sqrt{z^2a^2 + y^2b^2}}{za^2 + yb^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{y^2b^2} + \frac{1}{z^2a^2}}}{\frac{1}{yb^2} + \frac{1}{za^2}}$$

In Fig. 7. ist ferner $CO = c$, und $Ot : tp = c^2 : \frac{a^2b^2}{z^2a^2 + y^2b^2}$

$$OF : FD = Ot . Cp : tp . CD = c^2(za^2 + yb^2) : \frac{a^2b^2}{z^2a^2 + y^2b^2}(z^2a^2 + y^2b^2) = c^2(za^2 + yb^2) : a^2b^2$$

$$Ct : CF = Cp.OD : pD.OF + Cp.OD = (za^2 + yb^2)(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2 : ((z^2 - z)a^2 + (y^2 - y)b^2) \times c^2(za^2 + yb^2) + (za^2 + yb^2)(a^2b^2 + (za^2 + yb^2)c^2) = a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2 : (z^2a^2 + y^2b^2)c^2 + a^2b^2$$

Aber $$Ct : CF = a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2 : a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{z}{b^2} + \frac{y}{a^2} : \frac{1}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

Nun ist $$Ct = \frac{CO . Cp}{Op} = \frac{abc}{\sqrt{z^2a^2 + y^2b^2} . \sqrt{\frac{a^2b^2}{z^2a^2 + y^2b^2} + c^2}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}}}$$

also ist CF oder die Einheit in der Dimension senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ in dem Octaëder $\boxed{a : b : c}$,

$$CF = \frac{a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2}{a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2}\, Ct = \frac{abc\sqrt{a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2}}{a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}}}{\frac{1}{c^2} + \frac{z}{b^2} + \frac{y}{a^2}}$$

Wenn nun wiederum für die Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c}$, durch den Endpunkt von c gelegt, mithin als $\boxed{\frac{p}{n}a : \frac{p}{m}b : c}$ angesehen, in Fig. 8. $Cn = \frac{p}{n}CA = \frac{p}{n}\, a$ und $Cm = \frac{p}{m}\, CB = \frac{p}{m}\, b$ ist, und wiederum $Cq : qB = \frac{n}{p} \cdot \frac{p}{m}b : (1 - \frac{n}{m})\, b = n : m - n$,

so wird $Cu : CD = Cq.AB : qB.AD + Cq.AB = n.(za^2 + yb^2) : (m - n)\, za^2 + n\,(za^2 + yb^2) = n\,(za^2 + yb^2) : mza^2 + nyb^2$

$$Cu = \frac{n\,(za^2 + yb^2)}{mza^2 + nyb^2}\, CD$$

$$Cs = \frac{p}{n}\, Cu = \frac{p\,(za^2 + yb^2)}{mza^2 + nyb^2}\, CD$$

folglich der der Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ selbst in der Richtung CD angehörige Werth $= \frac{1}{p}\, Cs = \frac{za^2 + yb^2}{mza^2 + nyb^2}\, CD$

Und in Fig. 9. wird, da $Cs : sD = p\,(za^2 + yb^2) : (m - p)\, za^2 + (n - p)\, yb^2$,

$Cx : CF = Cs.OD : sD.OF + Cs.OD = p\,(za^2 + yb^2)\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2) : ((m - p)\, za^2 + (n - p)\, yb^2)\, c^2\,(za^2 + yb^2) + p\,(za^2 + yb^2)\,(a^2b^2 + za^2b^2 + yb^2c^2) = p\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2) : mza^2c^2 + nyb^2c^2 + pa^2b^2$

$$Cx = \frac{p\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2)}{p.1.a^2b^2 + nyb^2c^2 + mza^2c^2}\, CF$$

So wie aber Cx der durch O, d. i. durch den Punkt $1.c$ gelegten Fläche $\boxed{\frac{p}{n}a : \frac{p}{m}b : c}$ in der Richtung CF zukam, so kommt der durch $\frac{1}{p}\, c$ gelegten Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ in dieser Richtung der Werth zu

$$= \frac{1}{p}\, Cx = \frac{1.a^2b^2 + yb^2c^2 + za^2c^2}{p.1.a^2b^2 + nyb^2c^2 + mza^2c^2}\, CF = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{y}{a^2} + \frac{z}{b^2}}{\frac{1.p}{c^2} + \frac{n.y}{a^2} + \frac{m.z}{b^2}}\, CF =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}{\frac{n.y}{a^2} + \frac{m.z}{b^2} + \frac{p.1}{c^2}}$$

Und dies ist der gesuchte Werth in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ für die Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$.

Wegen der Ungleichheit der Dimensionen *a, b, c* ist auch eine Fläche $\boxed{\frac{1}{z}a : \frac{1}{y}b : c}$ u.s.f. der vorigen $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ ganz ungleichartig, und daher die Wiederholung analoger Flächen durch Umtausch der Coëfficienten in den verschiedenartigen Grunddimensionen in der Natur solcher Systeme nicht gegründet. Für sie würde daher das Schema Fig. 5. sich vereinfachen in das Fig. 10., wo blofs der Unterschied positiver und negativer Gröfsen in den Dimensionen *a, b, c* bleibt, die Coëfficienten einer jeden übrigens unverändert gelassen werden. Dies giebt im allgemeinen acht zu unterscheidende Richtungen; senkrecht gegen $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ oder gegen $\boxed{-\frac{1}{y}a : -\frac{1}{z}b : -c}$; gegen $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : -c}$ oder gegen $\boxed{-\frac{1}{y}a : -\frac{1}{z}b : c}$; $\boxed{\frac{1}{y}a : -\frac{1}{z}b : c}$ oder $\boxed{-\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : -c}$; und $\boxed{-\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ oder $\boxed{\frac{1}{y}a : -\frac{1}{z}b : -c}$.

Von den letzteren sechs Werthen zeigt das Schema, Fig. 10. die drei, welche den gröfseren Ausschnitten aufserhalb des Dreiecks zugehören; ihre negativen, in den entgegengesetzten kleineren Ausschnitten hinzuzufügen, wäre überflüssig. Für den entgegengesetzten des ersten bedarf es im Schema wieder keiner Stelle, da er negirt ist, wenn in beiden Flächen $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ und $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ die entsprechenden Dimensionen alle in gleicher positiver Richtung genommen werden.

Es ist an sich klar, dafs, wenn eine der Gröfsen *y*, *z*, oder 1 (als Divisor des *c*) im Zeichen $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ = Null gesetzt wird, der Coëfficient innerhalb des Dreiecks mit einem der angrenzenden aufserhalb identisch wird; seine Stelle rückt dann in die zwischen beiden liegende Seite des Dreiecks, und die gemeinte Richtung, in welcher er den Werth der Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ angiebt, ist dann senkrecht auf einer Fläche aus einer der drei Zonen, deren Axen parallel sind mit einer der drei Grunddimensionen *a*, *b*, oder *c*.

§. 5.

Der Fall des viergliedrigen Systems ist bekanntlich der, in welcher zwei der rechtwinklichen Grunddimensionen unter einander gleich sind,

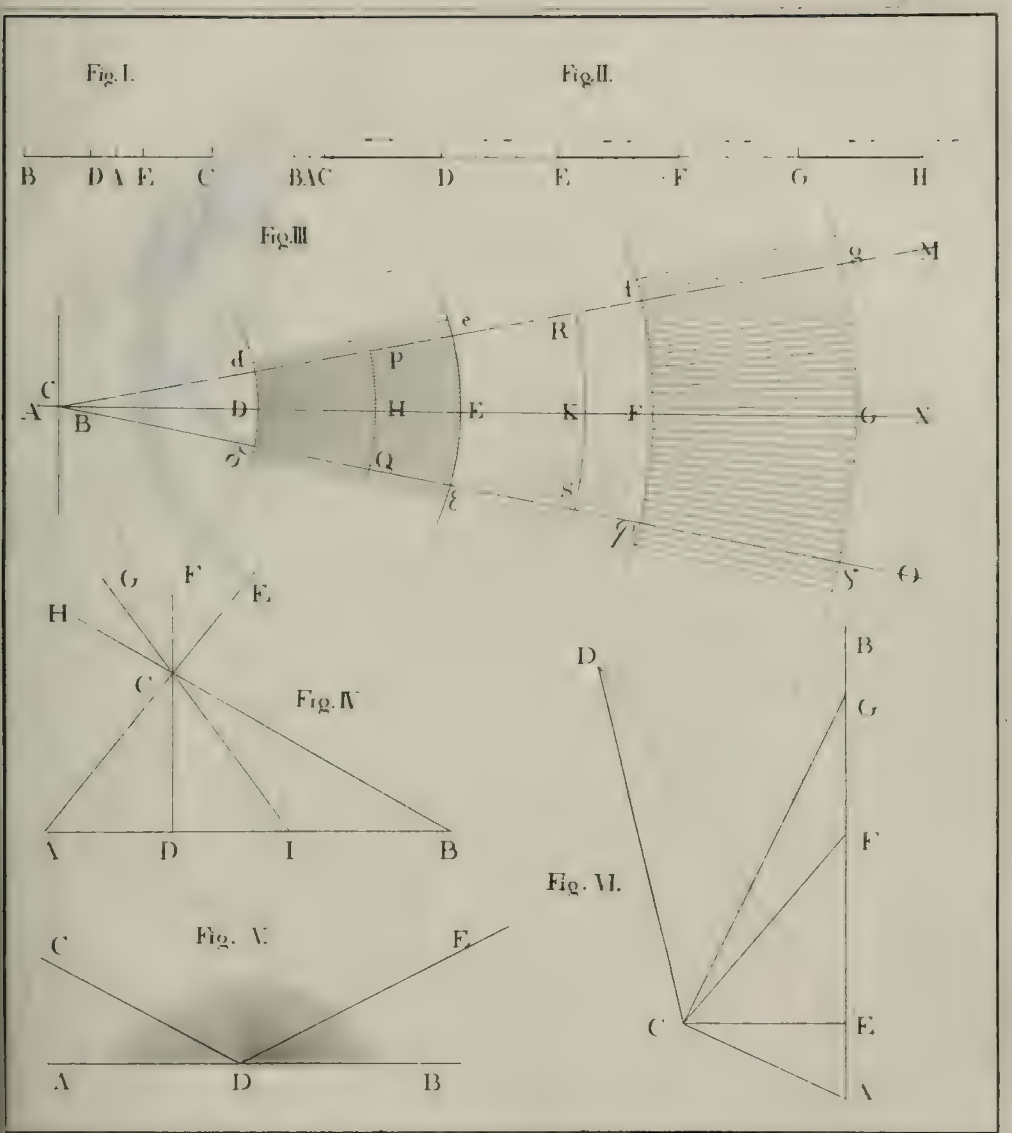
aber verschieden von der dritten. Wir setzen also $a = b$, so verwandelt sich in der Form des Coëfficienten der gemeinschaftliche Zähler in $\frac{y+z}{a^2} + \frac{1}{c^2}$, der Nenner aber in die verschiedenen Werthe, wie sie das Schema Fig. 11. giebt, mit Weglassung der entgegengesetzten von den geschriebenen. Es verdoppelt sich nemlich wieder die Zahl der gleichartigen Flächen gegen die vorige; die beiden gleichen a vertauschen ihre Coëfficienten wechselsweise und geben dann mit dem unveränderten c völlig gleiche Flächen; es sind die, welche zusammen einen Vierundvierkantner bilden. Sie liegen um die Endspitze c symmetrisch herum, welches in Fig. 11. unmittelbar einleuchten würde, wenn wir nicht der Bequemlichkeit des Raumes wegen, statt der in den kleinen Ausschnitt an c gehörigen, die ihnen entgegengesetzten im unteren grofsen Ausschnitt, geschrieben hätten. Im sphäroëdrischen System stellen sich um jede Octaëderecke drei Reihen solcher Vierundvierkantner und bilden den Sechsmalachtflächner. Welche je acht nebst den ihnen parallelen es sind, sieht man jetzt in der Fig. 5. sehr leicht. Nur die äufserste der drei um die obere Ecke des Dreiecks herumliegenden Reihen hat uns ihr Gegenstück in Fig. 11. gegeben; wir hätten jede der beiden anderen, die mittlere oder die innere Reihe wählen können; aber wenn wiederum $z > y > 1$, und $m > n > p$, so sind theils die Stellen, theils die jedesmaligen Combinationen der Gröfsen, aus welchen der Nenner des Coëfficienten zusammengesetzt wird, an den verschiedenen Stellen als diejenigen bestimmt, welche die Fig. 11. darlegt.

Verbesserungen.

Seite 79, Zeile 2 und 3. v. u. statt der Worte: dafs Lagrange und noch weniger seine Vorgänger eine u.s.w. lies: dafs Lagrange und seine Vorgänger keine u.s.w.

- 92, - 4. v.u. statt dritte, lies: zweite.

Der Leser beliebe in den Abhandlungen der physikalischen Klasse Band 1822-1823. Seite 199. Zeile 23. v.o. statt Grund, Grad zu lesen.



Figuren zu der Abhandlung über die Grundlehren der Akustik.



Tab. I

Zu Herrn Lichtensteins Abhandl. üb. d. Antilopen Phys. Classe 1823





Antilope Leucoryx.

Tab.

Zu Herrn Lichtenstein. Abhandl. über Antilopen. Phys. Classe 18

Tab. II.



Antilope Addax,

Fem. et Juveneus.

Tab.

zu Herrn Lichtensteins. Abhandl. üb. d. Antilopen Thye. Classe



1/10.

Antilope Dama,

Mas et Juveneus.

Nach der Natur gem. u. Lithogr. v. F. L. Schmidt

zu Herrn Lichtensteins. Abhandl. üb. d. Antilopen. Phys. Classe 182



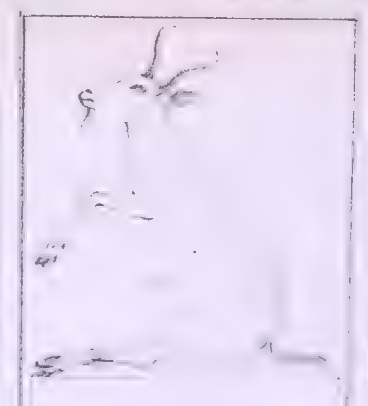
1/10

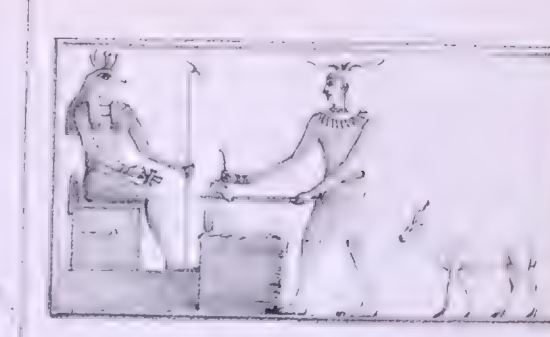
Antilope Dama,

Fem. et Juveneus.

Tab. V.

zu Herrn Lichtensteins Abhandl. üb. d. Antilopen. Phys. Classe 1824





1/10

Antilope Dorcas,

Mas, Fem. et Hinnuli.

Abhandlungen

der

mathematischen Klasse

der

Königlichen

Akademie der Wissenschaften

zu Berlin.

Aus dem Jahre

1824.

Berlin.

Gedruckt in der Druckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften.

1826.

In Commission bei F. Dümmler.

Inhalt.



Untersuchung

des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.

Von
Hrn. BESSEL.

[Der Akademie der Wissenschaften vorgelegt am 29. Januar 1824.]

1.

Die Störungen der elliptischen Bewegung eines Planeten durch einen anderen bestehen aus zwei Theilen: der eine rührt von der Anziehung her, welche der gestörte Planet durch den störenden erfährt; der andere, von der Bewegung der Sonne, welche der letztere erzeugt. Beide Theile sind in den bisherigen Entwickelungen der planetarischen Störungen zusammengenommen; allein es ist zweckmäfsiger, jeden derselben abgesondert zu untersuchen. Der letztere nämlich kann, wie ich in gegenwärtiger Abhandlung zeigen werde, direct und vollständig entwickelt werden und verdient deshalb eine Trennung von dem ersteren, bei welchem dieses noch nicht geleistet worden ist; die Trennung wird sogar nothwendig, wenn man die bisher allgemeine Annahme, dafs der störende Planet auf den gestörten und die Sonne mit gleicher Masse wirkt, einer Prüfung unterwerfen will.

Diese Annahme ist eine Folge des Satzes, dafs die Körper ihren Massen proportional anziehen. Newton leitete denselben bekanntlich aus Erfahrungssätzen, verbunden mit der nothwendigen Gleichheit der

Wirkung und Gegenwirkung ab. Aber abgesehen davon, dafs die Erfahrungssätze innerhalb gewisser Grenzen bezweifelt werden können, kann man auch nachweisen, dafs die Data, welche Newton seiner Annahme zum Grunde legte, andere Systeme keinesweges ausschliefsen, so dafs also anderweitige Erfahrungen entscheiden müssen, ob der Satz von der den Massen proportionalen Anziehung der Körper wirklich das allgemeine Gesetz der Natur ist. Da dieses den angenommenen Vorstellungen entgegen ist, so wird es mir erlaubt sein, diese Abhandlung durch eine nähere Untersuchung der Gründe zu eröffnen, wodurch Newton diesen Theil seines Systems unterstützte.

Um dieses kurz und deutlich thun zu können, werde ich die beschleunigende Kraft, mit welcher der Körper x in der Entfernung 1 auf den Körper y wirkt, durch $\binom{x}{y}$ bezeichnen. Nach dieser Bezeichnung hat man die Sätze, auf welche Newton's Annahme sich gründet, folgendermafsen:

$$1 \ldots\ldots \binom{0}{1} = \binom{0}{2} = \binom{0}{3} = \text{u. s. w.}$$

wo 0 die Sonne und 1, 2, 3 ... Planeten bedeuten: denn das dritte Keplersche Gesetz erfordert, dafs die beschleunigende Kraft, womit die Sonne auf die Planeten wirkt, auf gleiche Entfernung reducirt, gleich ist;

$$2 \ldots\ldots \binom{p}{I} = \binom{p}{II} = \binom{p}{III} = \text{u. s. w.}$$

wo p den Jupiter oder Saturn und $I, II, III \ldots$ ihre Monde bezeichnen: denn auch bei diesen bewährt sich dasselbe Keplersche Gesetz;

$$3 \ldots\ldots \binom{t}{u} = \binom{t}{v} = \binom{t}{w} = \text{u. s. w.} = \binom{t}{I}$$

wo t die Erde, $u, v, w \ldots$ irdische Körper und I den Mond bedeuten: denn Newton's Versuche über die Pendelschwingungen verschiedenartiger Körper und die Vergleichung derselben mit der Bewegung des Mondes, zeigten, dafs die be-

schleunigende Kraft, womit die Erde auf diese Körper wirkt, gleich ist;

$$4\ldots\ldots\binom{0}{p} = \binom{0}{I} = \binom{0}{II} = \text{u. s. w.}$$

denn wenn diese beschleunigenden Kräfte nicht gleich wären, so müfsten die Bewegungen der Monde Ungleichheiten zeigen, welche die Bewegungen nicht verrathen.

$$5\ldots\ldots\binom{x}{y}\, y = \binom{y}{x}\, x$$

wo y und x die Massen der Körper y und x bezeichnen; die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung erfordert dieses, von welcher Beschaffenheit auch die Wirkung sein mag.

Dafs diese fünf Sätze nicht allein mit der Annahme der Anziehung im Verhältnifse der Massen, sondern noch mit anderen Hypothesen vereinbar sind, glaube ich am besten zeigen zu können, wenn ich eine dieser Hypothesen mit denselben vergleiche: ich nehme die Körper als aus verschiedenen Elementen $a, b, c\ldots$ zusammengesetzt an, so dafs a nur a, b nur b, u.s.w... nicht aber das eine Element das andere anzieht; von diesen Elementen enthalte die Sonne gleiche Quantitäten, und alles, was zu einem Hauptplaneten gehört, sowohl seine einzelnen Theile als seine Monde, sei, in Beziehung auf diese Elemente, ähnlich, wenn auch nicht gleich gemischt.

Denkt man sich zwei Körper x und y, deren erster von den verschiedenen Elementen die Quantitäten $\overset{x}{a}, \overset{x}{b}, \overset{x}{c}\ldots$ enthält, der andere $\overset{y}{a}, \overset{y}{b}, \overset{y}{c}\ldots$, so ist die Anziehung des einen durch den anderen

$$\overset{x}{a}\overset{y}{a} + \overset{x}{b}\overset{y}{b} + \overset{x}{c}\overset{y}{c} + \ldots.$$

allgemein übereinstimmend mit der fünften Forderung; die beschleunigende Kraft, womit der erste Körper auf den anderen wirkt, ist diese Anziehung dividirt durch die Masse des angezogenen, oder

$$\binom{x}{y} = \frac{\overset{x}{a}\overset{y}{a} + \overset{x}{b}\overset{y}{b} + \overset{x}{c}\overset{y}{c} + \ldots.}{\overset{y}{a} + \overset{y}{b} + \overset{y}{c} + \ldots.}$$

Behält man nun die oben schon angewandten Bezeichnungen der Sonne, der Planeten, Monde und irdischen Körper bei, und setzt man, der Hypothese zufolge,

$$\overset{0}{a} = \overset{0}{b} = \overset{0}{c} = \text{u. s. w.}$$

$$\overset{p}{a} : \overset{I}{a} : \overset{II}{a} : \ldots\ldots = \overset{p}{b} : \overset{I}{b} : \overset{II}{b} : \ldots\ldots = \overset{p}{c} : \overset{I}{c} : \overset{II}{c} : \ldots\ldots = \text{u. s. w.}$$

$$\overset{t}{a} : \overset{I}{a} : \overset{u}{a} : \ldots\ldots = \overset{t}{b} : \overset{I}{b} : \overset{u}{b} : \ldots\ldots = \overset{t}{c} : \overset{I}{c} : \overset{u}{c} : \ldots\ldots = \text{u. s. w.}$$

so hat man

$$\binom{0}{1} = \frac{\overset{0}{a}\overset{1}{a} + \overset{0}{a}\overset{1}{b} + \overset{0}{a}\overset{1}{c} + \ldots\ldots}{\overset{1}{a} + \overset{1}{b} + \overset{1}{c} + \ldots\ldots} = \overset{0}{a},$$

also den ersten Erfahrungssatz

$$\binom{0}{1} = \binom{0}{2} = \binom{0}{3} = \text{u. s. w.};$$

ferner hat man

$$\binom{p}{I} = \frac{\overset{p}{a}\overset{I}{a} + \overset{p}{b}\overset{I}{b} + \overset{p}{c}\overset{I}{c} + \ldots\ldots}{\overset{I}{a} + \overset{I}{b} + \overset{I}{c} + \ldots\ldots}$$

welches, mit $\overset{p}{a} : \overset{I}{a} = \overset{p}{b} : \overset{I}{b} = \overset{p}{c} : \overset{I}{c} = \text{u. s. w.} = 1 : \lambda$ verbunden,

$$\binom{p}{I} = \frac{\binom{p}{a}^2 \lambda + \binom{p}{b}^2 \lambda + \binom{p}{c}^2 \lambda + \ldots\ldots}{\overset{p}{a} \,.\, \lambda + \overset{p}{b} \,.\, \lambda + \overset{p}{c} \,.\, \lambda + \ldots\ldots} = \frac{\binom{p}{a}^2 + \binom{p}{b}^2 + \binom{p}{c}^2 + \ldots\ldots}{\overset{p}{a} + \overset{p}{b} + \overset{p}{c} + \ldots\ldots}$$

und daher den zweiten Erfahrungssatz

$$\binom{p}{I} = \binom{p}{II} = \binom{p}{III} = \text{u. s. w.}$$

giebt; der dritte und vierte Erfahrungssatz folgen aus denselben Betrachtungen, wodurch die Behauptung, daſs die Hypothese denselben

Gründen entspreche, aus welchen Newton die seinige ableitete, gerechtfertigt ist. Dieselbe Hypothese giebt aber

$$\binom{n}{0} = \frac{\overset{0}{a}\left(\overset{n}{a} + \overset{n}{b} + \overset{n}{c} + \dots\right)}{\overset{0}{a} + \overset{0}{b} + \overset{0}{c} + \dots}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{\overset{1}{a}\overset{n}{a} + \overset{1}{b}\overset{n}{b} + \overset{1}{c}\overset{n}{c} + \dots}{\overset{1}{a} + \overset{1}{b} + \overset{1}{c} + \dots}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{\overset{2}{a}\overset{n}{a} + \overset{2}{b}\overset{n}{b} + \overset{2}{c}\overset{n}{c} + \dots}{\overset{2}{a} + \overset{2}{b} + \overset{2}{c} + \dots}$$

u. s. w.

also die beschleunigenden Kräfte, womit der Planet n auf die Sonne und die übrigen Planeten wirkt, im Allgemeinen verschieden.

Die Hypothese, vermöge welcher hier den fünf Sätzen genügt worden ist, verwandelt sich in die Newtonsche, wenn man nur ein Element annimmt; sie ist so gewählt, dafs sie der letzteren so nahe als möglich kömmt, übrigens aber nur als ein Mittel aufgestellt, wodurch gezeigt werden sollte, dafs Newton's Hypothese nicht eine Folge der fünf Sätze ist. Ein Planet kann also so viele verschiedene Massen (um den gewöhnlichen Sprachgebrauch beizubehalten) zeigen, als Körper vorhanden sind, auf welche er wirkt; betrachtet man aber die gegenseitigen Bewegungen von n Planeten und der Sonne, so finden, vermöge des fünften Satzes, unter den $n\,(n+1)$ Massen, $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Bedingungsgleichungen statt, und, wenn man auch den ersten Satz als wahr annimmt, $\frac{1}{2}n\,(n+1)$, so dafs nur $\frac{1}{2}n\,(n+1)$ Massen unbekannt bleiben. Setzt man z. B. für drei Planeten

$$\binom{0}{1} = 1\;;\; \binom{0}{2} = 1\;;\; \binom{0}{3} = 1$$

$$\binom{1}{0} = m'\;;\; \binom{1}{2} = m'i\;;\; \binom{1}{3} = m'k$$

$$\binom{2}{0} = m''\;;\; \binom{2}{1} = m''i'\;;\; \binom{2}{3} = m''l$$

$$\binom{3}{0} = m'''\;;\; \binom{3}{1} = m'''k'\;;\; \binom{3}{2} = m'''l'$$

so hat man die Gleichungen

$$i = i' \; ; \; k = k' \; ; \; l = l'$$

wodurch die Zahl der unbekannten Gröſsen von 9 auf 6 reducirt wird.

Es ist übrigens klar, daſs man die vier ersten Sätze, welche durch Erfahrung gegeben sind, innerhalb gewisser Grenzen bezweifeln kann, welche, namentlich bei den beiden ersten derselben, vielleicht nicht so eng sind, als der Schärfe der heutigen Beobachtungen angemessen wäre. Ob aber die astronomischen Theorien allenthalben in so groſser Uebereinstimmung mit den Beobachtungen sind, daſs dadurch jeder Zweifel an der Wahrheit der Newtonschen Annahme zurückgewiesen wird, dieses ist eine Frage, welche wohl Niemand bejahen wird, deren genaue Erörterung jedoch sehr wichtig ist und die gröſsten Fortschritte der Wissenschaft verheiſst.

Der Erste welcher die Anziehung im Verhältnisse der Massen bezweifelte, ist Johann Tobias Mayer [1]; ich habe aber geglaubt, eine von der seinigen verschiedene Ansicht aufstellen zu dürfen, weil es mir wesentlich zu sein schien, zu zeigen, daſs unter den Werthen von

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$$

Verschiedenheiten sein können, nicht etwa nur von der Ordnung der Planetenmassen, sondern von jeder beliebigen Gröſse.

2.

Den Planeten, dessen Bewegung untersucht werden soll, werde ich im Folgenden durch p bezeichnen, den störenden durch p'; als Einheit der Kräfte werde ich

$$\binom{0}{p} + \binom{p}{0}$$

annehmen, und, in diesem Maſse ausgedrückt,

$$\binom{p'}{0} \text{ und } \binom{p'}{p}$$

durch m und m' andeuten.

---

(1) *Comment. Soc. Reg. Scient. Gottingensis ad A. MDCCCIV–VIII.*

Wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten und r den Radius-Vector von p bedeuten, x', y', z', r' dasselbe für p' und

$$\varrho = \sqrt{\left\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right\}}$$

$$R = \frac{m\,(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\varrho^3}$$

so hat man

$$0 = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \frac{x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \frac{y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \frac{z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right)$$

Die störenden Kräfte, parallel mit dem Radius-Vector, senkrecht auf denselben in der Ebene und nach der Richtung der Bewegung, und senkrecht auf diese beiden, bezeichne ich durch A', B', C'; die letzte ist positiv, wenn sie von oben nach unten gerichtet ist, für einen Beobachter welcher, von der Sonne aus, die Bewegung des Planeten von der Rechten nach der Linken sieht. Ich werde zuerst die Ausdrücke dieser, Kräfte durch die Differentialquotienten von R, in Beziehung auf die Elemente von p, angeben und dabei folgende Bezeichnungen anwenden:

Länge des aufsteigenden Knotens . . . . n
Neigung der Bahn i
Entfernung des Perihels vom Knoten . . . . ω
Excentricität . . . . e
halbe grofse Axe . . . . a
$\sqrt{a\,(1-ee)}$ . . . . h
wahre, excentrische, mittlere Anomalie . . . . ϕ, ε, μ
für den störenden Planeten . . . . $n', i', \omega', e', a', h', \phi', \varepsilon', \mu'$.

Man hat bekanntlich

$$x = r\left\{\operatorname{Cos} n \operatorname{Cos}(\omega+\phi) - \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Cos} i\right\}$$

$$y = r\left\{\operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(\omega+\phi) + \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Cos} i\right\}$$

$$z = r \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Sin} i$$

$$rA' = \left(\frac{dR}{dx}\right) x + \left(\frac{dR}{dy}\right) y + \left(\frac{dR}{dz}\right) z$$

$$rB' = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$rC' = \left(\frac{dR}{dx}\right) r \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i - \left(\frac{dR}{dy}\right) r \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i + \left(\frac{dR}{dz}\right) r \operatorname{Cos} i$$

also

$$[1] \ldots rA' = \left(\frac{dR}{dr}\right) r = \left(\frac{dR}{da}\right) a$$

$$[2] \ldots rB' = \left(\frac{dR}{d\omega}\right)$$

Multiplicirt man den Ausdruck für $r\,C'$ mit Sin $(\omega + \phi)$ und setzt man in dem Producte für

$$r \operatorname{Sin} (\omega + \phi) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i; -r \operatorname{Sin} (\omega + \phi) \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i; r \operatorname{Sin} (\omega + \phi) \operatorname{Cos} i$$

ihre Ausdrücke, nämlich

$$\left(\frac{dx}{di}\right); \left(\frac{dy}{di}\right); \left(\frac{dz}{di}\right)$$

so erhält man

$$[3] \ldots r\,C' \operatorname{Sin} (\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{di}\right)$$

Man hat ferner die Gleichungen

$$\left(\frac{dR}{d\omega}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$\left(\frac{dR}{dn}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)$$

und

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dx}{dn}\right) = r \operatorname{Cos} (\omega + \phi) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i^2$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dy}{dn}\right) = -r \operatorname{Cos} (\omega + \phi) \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i^2$$

$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dz}{dn}\right) = r \operatorname{Cos} (\omega + \phi) \operatorname{Cos} i \operatorname{Sin} i$$

also, wenn man $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ mit Cos i multiplicirt und $\left(\frac{dR}{dn}\right)$ davon abzieht,

$$[4] \ldots r\,C' \operatorname{Cos} (\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cot} i - \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{Cosec} i$$

Mehrerer Einfachheit halber werde ich, im Folgenden, die Bahn des störenden Planeten zur festen Ebene wählen, die Winkel ω und ω' von dem aufsteigenden Knoten der Bahn des gestörten auf dieser Ebene anrechnen, und unter I die Neigung derselben Bahn gegen die feste Ebene verstehen, wodurch man erhält:

$$[5] \ldots r\,C' \operatorname{Sin}(\omega+\phi) = \left(\frac{dR}{dI}\right)$$

$$[6] \ldots r\,C' \operatorname{Cos}(\omega+\phi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \operatorname{Cosec} I$$

3.

Durch diese störenden Kräfte A', B', C' habe ich früher ([1]) die Veränderungen der Elemente von p ausgedrückt; jetzt werde ich unmittelbar die Störungen des Radius-Vectors $= \delta r$, der wahren Länge in der Bahn $= \delta v$ und der Breite über der mittleren Ebene der Bahn $= \delta s$ angeben, dabei aber nur die erste Potenz der störenden Masse berücksichtigen. Man hat ([2])

$$0 = \frac{d \,.\, r\frac{dr}{dt}}{dt} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + r\,A'$$

woraus, unter Vernachlässigung von δr^2 u. s. w., folgt

$$0 = \frac{d^2 \,.\, r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + r\,A' + \delta\,\frac{1}{a}.$$

Setzt man für $\delta\,\frac{1}{a}$ seinen Ausdruck durch die störenden Kräfte, nämlich

$$2\int\left\{A'\,\frac{dr}{dt} + B'\,\frac{h}{r}\right\} dt$$

$$= 2\int\left\{\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) dv\right\} = 2\int\left\{\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv\right\}$$

oder, da das in Beziehung auf die Coordinaten von p genommene Differential von R

$$= \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

([1]) Untersuchungen über den Kometen von 1807. II. Abtheilung.

([2]) Ebendaselbst S. 52.

ist,

$$\delta \frac{1}{a} = 2 \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu;$$

so hat man

$$0 = \frac{d^2\, r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + a\left(\frac{dR}{da}\right) + 2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

welche Gleichung *Méc. Cél.* Buch II. §. 46. folgendermafsen integrirt ist:

$$[7] \ldots \delta r = aa\, \sqrt{(1-ee)} \left\{ \text{Cos}\ \phi \int \frac{Q\, \text{Sin}\ \phi}{1+e\, \text{Cos}\ \phi}\, d\mu - \text{Sin}\ \phi \int \frac{Q\, \text{Cos}\ \phi}{1+e\, \text{Cos}\ \phi}\, d\mu \right\}$$

wo, um abzukürzen, Q für

$$a\left(\frac{dR}{da}\right) + 2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

geschrieben ist.

Den Ausdruck von δv giebt Herr Laplace durch den von δr; ich werde ihn aber unmittelbar auf die störenden Kräfte zurückführen. Man hat

$$0 = \frac{d\, rr \frac{dv}{dt}}{dt} + rB', \text{ oder}$$

$$0 = rr\, \frac{d\delta v}{dt} + 2r\, \delta r\ .\ \frac{dv}{dt} + \int rB'\, dt,$$

und wenn man mit $\frac{dt}{rr}$ multiplicirt und integrirt

$$\delta v = -\, 2\int \frac{\delta r}{r}\, dv - \int \frac{dt}{rr} \int rB'\, dt.$$

Das erste Glied dieses Integrals findet man, wenn man für δr seinen Ausdruck [7] setzt,

$$= - \frac{a}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \left(2\ \text{Sin}\ \phi + \frac{e}{2}\ \text{Sin}\ 2\,\phi\right) \int \frac{Q\, \text{Sin}\ \phi}{1+e\, \text{Cos}\ \phi}\, d\mu \right.$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\, e + 2\ \text{Cos}\ \phi + \frac{e}{2}\ \text{Cos}\ 2\,\phi\right) \int \frac{Q\, \text{Cos}\ \phi}{1+e\, \text{Cos}\ \phi}\, d\mu$$

$$\left. - \, 2\int Q\, d\mu + e \int d\phi \int \frac{Q\, \text{Sin}\ \phi}{1+e\, \text{Cos}\ \phi}\, d\mu \right\}$$

Wenn man das letzte Glied dieses Ausdrucks mit dem letzten Gliede des Ausdrucks von δv vereinigt, so ist die Summe

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{a^{\frac{3}{2}} e \operatorname{Sin} \phi \,.\, Q}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} + r B' \frac{dt}{d\mu} \right\} d\mu$$

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{Q r dr}{h} + r B' dt \right\}$$

und wenn man für Q und B' ihre Werthe setzt, auch $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) d\phi = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

eliminirt,

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{2r\, dr}{h} \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu + \frac{rr}{h} \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu \right\}$$

$$= -\frac{1}{h} \int dt \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

$$= -\frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int Q\, d\mu + \frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Man hat daher

$$[8] \ldots \delta v = -\frac{2a}{\sqrt{(1-ee)}} \left(\operatorname{Sin} \phi + \frac{e}{4} \operatorname{Sin} 2\phi\right) \int \frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu$$
$$- \frac{2a}{\sqrt{(1-ee)}} \left(\frac{3}{4} e + \operatorname{Cos} \phi + \frac{e}{4} \operatorname{Cos} 2\phi\right) \int \frac{Q \operatorname{Cos} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu$$
$$+ \frac{3a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int Q\, d\mu + \frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Die Breite über der mittleren Ebene der Bahn ist

$$\delta s = \delta i \operatorname{Sin} (\omega + \phi) - \delta n \operatorname{Cos} (\omega + \phi) \operatorname{Sin} i$$

Man hat aber (a.a.O. S. 56)

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{r C'}{h} \operatorname{Cos} (\omega + \phi)$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = -\frac{r C'}{h} \operatorname{Sin} (\omega + \phi) \operatorname{Cosec} i$$

und wenn man [3] und [4] substituirt

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} i + \frac{1}{h} \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{Cosec} i$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{dR}{di}\right) \operatorname{Cosec} i$$

welche Ausdrücke sich in der vortreflichen, von Herrn Laplace dem Bureau *des Longitudes* am 17ten August 1808 vorgelegten Abhandlung, nicht in dieser Form finden. Setzt man die Integrale derselben in den Ausdruck von δs, so erhält man

$$\delta s = \frac{-a}{\sqrt{(1-ee)}} \text{ Sin } (\omega+\phi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \text{Cotg } i - \left(\frac{dR}{dn}\right) \text{Cosec } i \right\} d\mu$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{(1-ee)}} \text{ Cos } (\omega+\phi) \int \left(\frac{dR}{di}\right) d\mu$$

oder, nach [5] und [6]

$$[9]\ldots\ \delta s = \frac{-a}{\sqrt{(1-ee)}} \text{ Sin } (\omega+\phi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \text{Cotg } I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \text{Cosec } I \right\} d\mu$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{(1-ee)}} \text{ Cos } (\omega+\phi) \int \left(\frac{dR}{dI}\right) d\mu$$

4.

Der Theil der Störungen des Radius-Vectors, der Länge in der Bahn und der Breite über der mittleren Ebene derselben, welcher den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, entsteht aus dem ersten Theile von R; ich werde daher

$$R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \text{Cos } (\omega+\phi) \text{ Cos } (\omega'+\phi') + \text{Sin } (\omega+\phi) \text{ Sin } (\omega'+\phi') \text{ Cos } I \right\}$$

setzen und diesem Ausdrucke die Form

$$[10]\ldots\ R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \text{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 \text{ Cos} (\phi-\phi'+\omega-\omega') + \text{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 \text{ Cos} (\phi+\phi'+\omega+\omega') \right\}$$

geben.

Die Entwickelung dieses R in eine Reihe, welche nach den Cosinussen der Zeit proportional wachsender Bögen fortgeht, hängt von den Entwickelungen von

$$r \text{ Cos } \phi,\ r \text{ Sin } \phi,\ \frac{1}{r'r'} \text{ Cos } \phi',\ \frac{1}{r'r'} \text{ Sin } \phi'$$

ab; diese letzteren werden aus einer besonderen, unten folgenden Untersuchung hervorgehen; für jetzt aber werde ich

$$r \operatorname{Cos} \phi = \overset{i}{a c} \operatorname{Cos} i\mu; \qquad r \operatorname{Sin} \phi = \overset{i}{a s} \operatorname{Sin} i\mu$$

$$\frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Cos} \phi' = \overset{k}{\gamma} \operatorname{Cos} k\mu'; \qquad \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Sin} \phi' = \overset{k}{\sigma} \operatorname{Sin} k\mu'$$

setzen und unter i und k alle ganze, sowohl positive als negative Zahlen, 0 nicht ausgenommen, verstehen. Erinnert man sich an die Bemerkung im 48sten Satze des 2ten Buchs der *Mécanique Céleste*, so findet man leicht

$$\begin{aligned}
\frac{a'a'r}{r'r'a} \operatorname{Cos} (\phi - \phi' + \omega - \omega') = & \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} + \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (\ \ i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} - \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (-i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} - \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (-i\mu + k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} + \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (\ \ i\mu + k\mu' + \omega - \omega')
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\overset{i}{c} = \overset{-i}{c}\ ;\ \overset{i}{s} = -\overset{-i}{s}\ ;\ \overset{k}{\gamma} = \overset{-k}{\gamma}\ ;\ \overset{k}{\sigma} = -\overset{-k}{\sigma}$$

und daher, wenn man, um abzukürzen,

$$\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma} \text{ durch } \overset{k}{\alpha}\ ,\ \overset{i}{c} + \overset{i}{s} \text{ durch } \overset{i}{a}$$

bezeichnet,

$$\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma} = \overset{-k}{\alpha}\ ,\ \overset{i}{c} - \overset{i}{s} = \overset{-i}{a}$$

wodurch der gegebene Ausdruck die Bezeichnung

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{4} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (\ \ i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{4} \overset{k}{\alpha} \overset{-i}{a} \operatorname{Cos} (-i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
+ & \tfrac{1}{4} \overset{-k}{\alpha} \overset{-i}{a} \operatorname{Cos} (-i\mu + k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{4} \overset{-k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (\ \ i\mu + k\mu' + \omega - \omega')
\end{aligned}$$

erhält. Da er für alle ganze i zu nehmen ist, so sind das erste und zweite, so wie das dritte und vierte Glied einander gleich, so dafs man ihn schreiben kann:

$$\tfrac{1}{2} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{2} \overset{-k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega - \omega')$$

und da auch diese beiden Glieder, für alle ganze k genommen, einander gleich sind, so hat man den Ausdruck

$$= \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\ \text{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

und eben so das zweite Glied von R [10]: folglich ist

$$[11]\ldots R = \frac{m\,a}{a'\,a'}\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\ \text{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\ \text{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

Hieraus folgt

$$[12]\ldots a\left(\frac{dR}{da}\right) = R$$

$$\left(\frac{dR}{d\mu}\right) = -\frac{a\,m}{a'\,a'}\ i\ .\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\ \text{Sin}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\ \text{Sin}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

und wenn $\frac{d\mu'}{d\mu} = \nu$ gesetzt wird,

$$2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right)d\mu = \frac{a\,m}{a'\,a'}\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\cdot\frac{2i}{i-k\nu}\ \text{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\cdot\frac{2i}{i+k\nu}\ \text{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

woraus, nach [7], folgt,

$$[13]\ldots Q = \frac{a\,m}{a'\,a'}\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\cdot\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\ \text{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\cdot\frac{3i+k\nu}{i+k\nu}\ \text{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

Man hat ferner

$$[14]\ldots\left(\frac{dR}{d\omega}\right)\text{Cotg}\,I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right)\text{Cosec}\,I$$

$$= \frac{a\,m}{a'\,a'}\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\ \tfrac{1}{2}\ \text{Sin}\,I\left\{\text{Sin}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \text{Sin}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

$$[15]\ldots\left(\frac{dR}{dI}\right)$$

$$= \frac{-a\,m}{a'\,a'}\ \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\ \tfrac{1}{2}\ \text{Sin}\,I\left\{\text{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \text{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

5.

Die Störung der Radius-Vectors setzt, nach [7], die Integrationen von

$$\frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1+e \operatorname{Cos} \phi}\, d\mu \text{ und } \frac{Q \operatorname{Cos} \phi}{1+e \operatorname{Cos} \phi}\, d\mu$$

oder, was dasselbe ist, von

$$\frac{1}{a\,(1-ee)}\, Qr \operatorname{Sin} \phi\, d\mu \text{ und } \frac{1}{a\,(1-ee)}\, Qr \operatorname{Cos} \phi\, d\mu$$

voraus. Nach der im vorigen Artikel angewandten Bezeichnung ist

$$r \operatorname{Sin} \phi = a \overset{h}{s} \operatorname{Sin} h\mu\,;\; r \operatorname{Cos} \phi = a \overset{h}{c} \operatorname{Cos} h\mu$$

wo h alle ganze Zahlen bedeutet; verbindet man dieses mit [15], so erhält man

$$\frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1+e \operatorname{Cos} \phi} = \frac{am}{a'a'} \overset{k}{\alpha}\, \overset{i}{a} \Big\{ \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 \cdot \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1-ee} \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \operatorname{Sin} h\mu$$

$$+ \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 \cdot \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1-ee} \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \operatorname{Sin} h\mu \Big\}$$

$$= \frac{am}{a'a'} \overset{k}{\alpha}\, \overset{i}{a} \Big\{ \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 \cdot \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1-ee} \operatorname{Sin} \Big((i+h)\, \mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big)$$

$$+ \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 \cdot \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1-ee} \operatorname{Sin} \cdot \Big((i+h)\, \mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big) \Big\}$$

wenn man mit $d\mu$ multiplicirt und integrirt, auch mit dem zweiten Theile des Ausdrucks [7] ganz ähnlich verfährt:

$$[16] \ldots \delta r = \frac{-a^3 m}{a'a' \sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha}\, \overset{i}{a} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 \Big\{ \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{i+h-k\nu} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \Big((i+h)\, \mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big)$$

$$+ \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{c}}{i+h-k\nu} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \Big((i+h)\, \mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big) \Big\}$$

$$- \frac{a^3 m}{a'a' \sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha}\, \overset{i}{a} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 \Big\{ \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{i+h+k\nu} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \Big((i+h)\, \mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big)$$

$$+ \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{c}}{i+h+k\nu} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \Big((i+h)\, \mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big) \Big\}$$

Setzt man nun noch

$$\operatorname{Cos} \phi = \overset{g}{C} \operatorname{Cos} g\mu, \quad \operatorname{Sin} \phi = \overset{g}{S} \operatorname{Sin} g\mu$$

und vereinigt man die Glieder, welche gleiche Cosinus enthalten, so hat man

$$\delta r = \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\cdot\frac{\text{Cos}\frac{1}{2}I^2}{i+h-k\nu}\left\{\overset{h}{s}\overset{g}{C}-\overset{h}{c}\overset{g}{S}\right\}\text{Cos}\left((i+h+g)\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)$$
$$-\frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\frac{3i+k\nu}{i+k\nu}\cdot\frac{\text{Sin}\frac{1}{2}I^2}{i+h+k\nu}\left\{\overset{h}{s}\overset{g}{C}-\overset{h}{c}\overset{g}{S}\right\}\text{Cos}\left((i+h+g)\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)$$

Setzt man endlich

$$i+h+g=f,\quad h=f-i-g$$

so erhält man

$$[17]\ldots\delta r = \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\cdot\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\cdot\frac{\text{Cos}\frac{1}{2}I^2}{f-g-k\nu}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\overset{g}{C}-\overset{(f-i-g)}{c}\overset{g}{S}\right\}\text{Cos}(f\mu-k\mu'+\omega-\omega')$$
$$-\frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\cdot\frac{3i+k\nu}{i+k\nu}\cdot\frac{\text{Sin}\frac{1}{2}I^2}{f-g+k\nu}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\overset{g}{C}-\overset{(f-i-g)}{c}\overset{g}{S}\right\}\text{Cos}(f\mu+k\mu'+\omega+\omega')$$

Die Berechnung des Coefficienten eines bestimmten Cosinus, für welchen also f und k gegebene Zahlen sind, erfordert eine doppelte Summation des Ausdrucks

$$\overset{i}{a}\cdot\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\cdot\frac{1}{f-g-k\nu}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\overset{g}{C}-\overset{(f-i-g)}{c}\overset{g}{S}\right\}$$

sowohl für i als für g; man kann für i nach und nach

$$0,\ \begin{matrix}+1, & +2, & +3, & \text{u. s. w.}\\ -1, & -2, & -3, & \text{u. s. w.}\end{matrix}$$

setzen und für jede dieser Voraussetzungen alle g nehmen. Diese Rechnung läfst sich erleichtern, wenn man die Logarithmen der wiederholt vorkommenden Gröfsen in Tafeln bringt, so dafs die erste derselben, mit den Argumenten k und i,

$$\text{Log}\left\{\frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\cdot\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\text{Cos}\frac{1}{2}I^2\right\}$$

die andere, mit den Argumenten x und g

$$\text{Log}\left\{\overset{x}{s}\overset{g}{C}-\overset{x}{c}\overset{g}{S}\right\}$$

angiebt. Wenn der in Cos $\frac{1}{2} I^2$ multiplicirte Theil bereits berechnet ist, so findet man den in Sin $\frac{1}{2} I^2$ multiplicirten dadurch, dafs man den ersten mit

$$\frac{\overset{-k}{\alpha}}{\overset{k}{\alpha}} \,\text{Tang}\, \tfrac{1}{2} I^2$$

multiplicirt und unter dem Cosinuszeichen ω' in $-\omega'$ verwandelt.

Man rechnet aber noch leichter, wenn man in [16] $i + h = n$ und $h = n - i$ setzt, wodurch man den Coefficienten von Cos ϕ Cos $(n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= -\frac{a^3\, m}{a' a' \sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{\overset{k}{\alpha}\,\text{Cos}\,\frac{1}{2} I^2}{n - k\nu} \cdot \Sigma \left\{\frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \overset{i}{a} \cdot \overset{(n-i)}{s}\right\}$$

und den Coefficienten von Sin ϕ Sin $(n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= -\frac{a^3\, m}{a' a' \sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{\overset{k}{\alpha}\,\text{Cos}\,\frac{1}{2} I^2}{n - k\nu} \cdot \Sigma \left\{\frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \overset{i}{a} \cdot \overset{(n-i)}{c}\right\}$$

findet, beide durch eine Summation in Beziehung auf i allein; nennt man diese Coefficienten $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$, so sind die beiden ersten Glieder von δr

$$\begin{aligned} &= A^{(n)} \,\text{Cos}\, \phi \,\text{Cos}\, (n\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\ &+ B^{(n)} \,\text{Sin}\, \phi \,\text{Sin}\, (n\mu - k\mu' + \omega - \omega') \end{aligned}$$

und ergeben daher, wenn man $n + g = f$ setzt, den Coefficienten von Cos $(f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$\begin{aligned} &= A^{(f)} \overset{0}{C} + (A^{(f-1)} + A^{(f+1)}) \overset{1}{C} + (A^{(f-2)} + A^{(f+2)}) \overset{2}{C} + \text{u.s.w.} \\ &- B^{(f)} \overset{0}{S} - (B^{(f-1)} - B^{(f+1)}) \overset{1}{S} - (B^{(f-2)} - B^{(f+2)}) \overset{2}{S} - \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder erhalten einen ganz ähnlichen Ausdruck.

6.

Die Störung der Länge in der Bahn findet man auf ganz ähnliche Art, aus dem Ausdrucke [8];

$$[18]\ldots\delta v=\frac{aam\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k\;i}{\alpha\,a}\Big\{\frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}\cdot\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\overset{h}{s}}{i+h-kv}\mathrm{Cos}\left((i+h)\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)$$
$$-\frac{(2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\mathrm{Cos}\,2\phi+\frac{3}{2}e)}{1-ee}\cdot\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\overset{h}{c}}{i+h-kv}\mathrm{Sin}\left((i+h)\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)$$
$$+\frac{5i-2kv}{(i-kv)^2}\mathrm{Sin}\left(i\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)\Big\}$$

$$+\frac{aam\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\overset{k\;i}{\alpha\,a}\Big\{\frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}\cdot\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\overset{h}{s}}{i+h+kv}\mathrm{Cos}\left((i+h)\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)$$
$$-\frac{(2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\mathrm{Cos}\,2\phi+\frac{3}{2}e)}{1-ee}\cdot\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\overset{h}{c}}{i+h+kv}\mathrm{Sin}\left((i+h)\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)$$
$$+\frac{5i+2kv}{(i+kv)^2}\mathrm{Sin}\left(i\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)\Big\}$$

Setzt man hier

$$2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\,\phi=(1-ee)\,\overset{g}{S'}\,\mathrm{Sin}\,g\mu$$
$$\frac{3}{2}\,e+2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,\phi=(1-ee)\,\overset{g}{C'}\,\mathrm{Cos}\,g\mu$$

und, so wie bei der vorigen Entwickelung, $i+h+g=f$, so erhält man

$$[19]\ldots\delta v=\frac{aam}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\left\{\begin{array}{l}+\left\{\begin{array}{l}\overset{k\;i}{\alpha\,a}\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}I^2}{f-g-kv}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\,\overset{g}{S'}-\overset{(f-i-g)}{c}\,\overset{g}{C'}\right\}\\+\overset{k\;f}{\alpha\,a}\cdot\frac{5f-2kv}{(f-kv)^2}\end{array}\right\}\mathrm{Sin}(f\mu-k\mu'+\omega-\omega')\\[2ex]+\left\{\begin{array}{l}\overset{k\;i}{\alpha\,a}\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}I^2}{f-g+kv}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\,\overset{g}{S'}-\overset{(f-i-g)}{c}\,\overset{g}{C'}\right\}\\+\overset{k\;f}{\alpha\,a}\cdot\frac{5f+2kv}{(f+kv)^2}\end{array}\right\}\mathrm{Sin}(f\mu+k\mu'+\omega+\omega')\end{array}\right.$$

Von der Berechnung dieses Ausdrucks gilt alles das, was bei Gelegenheit von δr gesagt worden ist; der Vortheil, auch hier nach [18] zu rechnen, wird noch dadurch vergröſsert, daſs die bei der Berechnung von δr schon angewandten, durch A^f und B^f u. s. w. bezeichneten Summen, hier wieder eine Anwendung finden.

7.

Die Störung der Breite ist, nach [9], wenn man, um abzukürzen, für

$$\int\left\{\left(\frac{dR}{d\omega}\right)\text{Cotg } I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right)\text{Cosec } I\right\} d\mu \text{ und} \int\left(\frac{dR}{dI}\right) d\mu$$

P und P' schreibt,

$$\begin{aligned}\delta s &= -\frac{a}{\sqrt{(1-ee)}}\left\{P \text{ Sin } (\omega+\phi) - P' \text{ Cos } (\omega+\phi)\right\}\\ &= -\frac{a}{\sqrt{(1-ee)}}\left\{(P \text{ Sin}\,\omega - P' \text{Cos}\,\omega)\text{ Cos}\,\phi + (P\text{ Cos}\,\omega + P' \text{Sin}\,\omega)\text{ Sin}\,\phi\right\}\end{aligned}$$

Nach [14] und [15] ist

$$\begin{aligned}P = -\frac{am}{a'a'}\cdot\tfrac{1}{2}\text{ Sin } I\cdot \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\,&\left\{\frac{1}{i-k\nu}\text{ Cos }(i\mu - k\mu' + \omega - \omega')\right.\\ &\left. - \frac{1}{i+k\nu}\text{ Cos }(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P' = -\frac{am}{a'a'}\cdot\tfrac{1}{2}\text{ Sin } I\cdot \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\,&\left\{\frac{1}{i-k\nu}\text{ Sin }(i\mu - k\mu' + \omega - \omega')\right.\\ &\left. - \frac{1}{i+k\nu}\text{ Sin }(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}\end{aligned}$$

Wenn man dieses in den letzten Ausdruck von δs setzt, so wird er

$$\delta s = \frac{aam\text{ Sin } I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}}{2}\left\{\begin{array}{l}\text{Sin }\phi\left\{\dfrac{\text{Cos }(i\mu - k\mu' - \omega')}{i-k\nu} - \dfrac{\text{Cos }(i\mu + k\mu' + \omega')}{i+k\nu}\right\}\\ -\text{Cos }\phi\left\{\dfrac{\text{Sin }(i\mu - k\mu' - \omega')}{i-k\nu} - \dfrac{\text{Sin }(i\mu + k\mu' + \omega')}{i+k\nu}\right\}\end{array}\right\}$$

und wenn man Sin ϕ und Cos ϕ nach der oben schon angewandten Bezeichnung entwickelt,

$$\begin{aligned}\delta s = \frac{aam\text{ Sin } I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}}{2}\{\overset{g}{S} - \overset{g}{C}\}\,&\left\{\frac{1}{i-k\nu}\text{ Sin }\big((i+g)\,\mu - k\mu' - \omega'\big)\right.\\ &\left. - \frac{1}{i+k\nu}\text{ Sin }\big((i+g)\,\mu + k\mu' + \omega'\big)\right\}\end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $i+g=f$, $i=f-g$, so wird er

$$[20]\ldots\ \delta s = \frac{aam\text{ Sin } I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\,\overset{(f-g)}{a}}{2}\{\overset{g}{S} - \overset{g}{C}\}\left\{\frac{\text{Sin }(f\mu - k\mu' - \omega')}{f-g-k\nu} - \frac{\text{Sin }(f\mu + k\mu' + \omega')}{f-g+k\nu}\right\}$$

und erfordert daher, für gegebene f und k, nur eine Summation, in Beziehung auf g.

8.

Diese vollständige Auflösung der Aufgabe erfordert nun noch die Bestimmung der durch c, γ, C, C' und s, σ, S, S' bezeichneten Coefficienten; man erhält dieselbe nach der Methode, welche ich der Akademie am 2ten Julius 1818 vorgelegt habe. Man hat nämlich

$$2\pi \overset{i}{c} = \int \frac{r}{a} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{s} = \int \frac{r}{a} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{\gamma} = \int \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Cos} \phi' \cdot \operatorname{Cos} i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi \overset{i}{\sigma} = \int \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Sin} \phi' \cdot \operatorname{Sin} i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi \overset{i}{C} = \int \operatorname{Cos} \phi \cdot \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{S} = \int \operatorname{Sin} \phi \cdot \operatorname{Sin} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{C'} = \int \left\{ \tfrac{3}{2} e + 2 \operatorname{Cos} \phi + \tfrac{1}{2} e \operatorname{Cos} 2\phi \right\} \frac{\operatorname{Cos} i\mu}{1 - ee} \, d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{S'} = \int \left\{ 2 \operatorname{Sin} \phi + \tfrac{1}{2} e \operatorname{Sin} 2\phi \right\} \frac{\operatorname{Sin} i\mu}{1 - ee} \, d\mu$$

sämmtliche Integrale von ϕ, ε oder $\mu = 0$ bis 2π genommen. Die sechs ersten derselben lassen sich leicht auf

$$\int \operatorname{Cos} i\mu \cdot \operatorname{Cos} \varepsilon d\varepsilon \text{ und } \int \operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon d\varepsilon$$

zurückführen, die beiden letzten auf die Coefficienten der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung. Denn man hat

$$1 \ldots \frac{r}{a} \operatorname{Cos} \phi = \operatorname{Cos} \varepsilon - e, \text{ also}$$

$$2\pi \overset{i}{c} = \int (\operatorname{Cos} \varepsilon - e) \operatorname{Cos} i\mu \, d\mu = \frac{1}{i} \operatorname{Sin} i\mu (\operatorname{Cos} \varepsilon - e) + \frac{1}{i} \int \operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon d\varepsilon$$

wo das erste Glied, ausgenommen für $i = 0$, verschwindet; daher

$$[21] \ldots 2\pi \overset{0}{c} = -3\pi e;\ 2\pi \overset{i}{c} = \frac{1}{i}\int \text{Sin}\, i\mu \cdot \text{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$2 \ldots \frac{r}{a}\,\text{Sin}\,\phi = \sqrt{(1-ee)}\,\text{Sin}\,\varepsilon$$

$$2\pi \overset{i}{s} = \sqrt{(1-ee)}\int \text{Sin}\, i\mu\ \text{Sin}\,\varepsilon \cdot d\mu = \frac{-\sqrt{(1-ee)}}{i}\,\text{Cos}\, i\mu\ \text{Sin}\,\varepsilon + \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\int \text{Cos}\, i\mu\ \text{Cos}\,\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$[22] \ldots 2\pi \overset{0}{s} = 0;\ 2\pi \overset{i}{s} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\int \text{Cos}\, i\mu \cdot \text{Cos}\,\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$3 \ldots \frac{d\left(\frac{r}{a}\,\text{Sin}\,\phi\right)}{d\mu} = \frac{e + \text{Cos}\,\phi}{\sqrt{(1-ee)}},\ \text{oder}\ \text{Cos}\,\phi = \sqrt{(1-ee)}\,\frac{d\left(\frac{r}{a}\,\text{Sin}\,\phi\right)}{d\mu} - e$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a}$ Sin ϕ ist $= \overset{i}{s}$ Sin $i\mu$, also das allgemeine Glied von Cos $\phi = i \cdot \overset{i}{s} \sqrt{(1-ee)}$ Cos $i\mu$; daher

$$[23] \ldots 2\pi \overset{0}{C} = -2\pi e;\ 2\pi \overset{i}{C} = (1-ee)\int \text{Cos}\, i\mu \cdot \text{Cos}\,\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$4 \ldots \frac{d\left(\frac{r}{a}\,\text{Cos}\,\phi\right)}{d\mu} = \frac{-\text{Sin}\,\phi}{\sqrt{(1-ee)}},\ \text{oder}\ \text{Sin}\,\phi = -\sqrt{(1-ee)}\,\frac{d\left(\frac{r}{a}\,\text{Cos}\,\phi\right)}{d\mu}$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a}$ Cos ϕ ist $= \overset{i}{c}$ Cos $i\mu$, also das allgemeine Glied von Sin $\phi = i \cdot \overset{i}{c} \sqrt{(1-ee)}$ Sin $i\mu$; daher

$$[24] \ldots 2\pi \overset{i}{S} = \sqrt{(1-ee)}\int \text{Sin}\, i\mu\ \text{Sin}\,\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$5 \ldots \frac{d\,\text{Sin}\,\phi}{d\mu} = \frac{aa}{rr}\sqrt{(1-ee)}\,\text{Cos}\,\phi,\ \text{oder}\ \frac{aa}{rr}\,\text{Cos}\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\,\frac{d\,\text{Sin}\,\phi}{d\mu},\ \text{folglich}$$

$$[25] \ldots 2\pi \overset{i}{\gamma} = i\int \text{Sin}\, i\mu'\ \text{Sin}\,\varepsilon'\, d\varepsilon'$$

$$6 \ldots \frac{d\,\text{Cos}\,\phi}{d\mu} = \frac{-aa}{rr}\sqrt{(1-ee)}\,\text{Sin}\,\phi,\ \text{oder}\ \frac{aa}{rr}\,\text{Sin}\,\phi = \frac{-1}{\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{d\,\text{Cos}\,\phi}{d\mu},\ \text{folglich}$$

$$[26] \ldots 2\pi \overset{i}{\sigma_{\prime}} = i\sqrt{(1-e'e')}\int \text{Cos}\, i\mu'\ \text{Cos}\,\varepsilon'\, d\varepsilon'$$

$$7\ldots\quad \frac{\frac{3}{2}e + 2\,\mathrm{Cos}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Cos}\,2\phi}{1-ee} = \frac{1-ee}{e\,(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)^2} - \frac{1}{e}$$

$$\frac{d\phi}{d\mu} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\frac{3}{2}e + 2\,\mathrm{Cos}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Cos}\,2\phi}{1-ee} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{e} \cdot \frac{d\phi}{d\mu} - \frac{1}{e}$$

Wenn man daher die Mittelpunktsgleichung durch

$$\phi - \mu = 2A'\,\mathrm{Sin}\,\mu + 2A''\,\mathrm{Sin}\,2\mu + \text{u.s.w.}$$

bezeichnet, so hat man

$$[27]\ldots\ \overset{0}{C'} = \frac{-1+\sqrt{(1-ee)}}{e};\quad \overset{i}{C'} = \frac{i\sqrt{(1-ee)}}{e}\,A^{(i)}$$

$$8\ldots\ \frac{d\phi}{de} = \frac{\mathrm{Sin}\,\phi}{1-ee}\,(2+e\,\mathrm{Cos}\,\phi) = \frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}, \text{ also}$$

$$[28]\ldots\ \overset{i}{S'} = \frac{dA^{(i)}}{de}.$$

Die beiden in den sechs ersten Formeln vorkommenden Integrale

$$\int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon \text{ und} \int \mathrm{Sin}\,i\mu \cdot \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon$$

kann man leicht auf $\int \mathrm{Cos}\,(h\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ reduciren, wo h eine ganze Zahl bedeutet; dieses letzte Integral werde ich durch

$$\int \mathrm{Cos}\,(h\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\pi\,\mathrm{I}_k^h$$

bezeichnen. Man hat nämlich

$$\int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon = \int \mathrm{Cos}\,i\mu\Big(1 - (1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)\Big)\frac{d\varepsilon}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot d\varepsilon - \frac{1}{e}\int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot d\mu$$

wo der letzte Theil, von $\mu = 0$ bis $\mu = 2\pi$ genommen, verschwindet; also

$$[29]\ldots\ \int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon = 2\pi \cdot \frac{1}{e}\,\mathrm{I}_{ie}^i$$

Ferner hat man

$$\int \mathrm{Sin}\,i\mu \cdot \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon = \int \mathrm{Cos}\,i\mu \cdot \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon - \int \mathrm{Cos}\,(\varepsilon + i\mu)\,d\varepsilon$$

oder

$$[30] \ldots\ldots\ldots\ldots \int \text{Sin}\, i\mu \cdot \text{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon = 2\pi \frac{1}{e} \text{I}^{i}_{ie} - 2\pi \cdot \text{I}^{i+1}_{ie}$$

Die Reihenentwickelung von I^h_k erhält man auf die, in meiner Abhandlung über die Keplersche Aufgabe angewandte Art [1], nämlich

$$[31] \ldots \text{I}^h_k = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{\Pi h} \left\{ 1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2\,(h+1)\,(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3\,(h+1)\,(h+2)\,(h+3)}\left(\frac{k}{2}\right)^6 + \text{u.s.w.} \right\}$$

woraus also folgende Formeln für die Berechnung der Coefficienten der obigen Ausdrücke hervorgehen, wobei die Reihen

$$1 - \frac{1}{i+1} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2\,(i+1)\,(i+2)}\left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \text{u.s.w.}$$

$$1 - \frac{1}{i+2} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2\,(i+2)\,(i+3)}\left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \text{u.s.w.}$$

der Kürze wegen durch ϕi und $\phi' i$ bezeichnet sind:

$$\overset{i}{c} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\Pi i}\left\{\phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\phi' i\right\} \quad ; \quad \overset{0}{c} = -\tfrac{3}{2}e$$

$$\overset{i}{s} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\Pi i} \sqrt{(1-ee)} \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{s} = 0$$

$$\overset{i}{C} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i}}{e\Pi i} (1-ee) \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{C} = -e$$

$$\overset{i}{S} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i}}{e\Pi i} \sqrt{(1-ee)} \left\{\phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\phi' i\right\} \quad ; \quad \overset{0}{S} = 0$$

$$\overset{i}{\gamma} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\Pi i}\left\{\phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\phi' i\right\} \quad ; \quad \overset{0}{\gamma} = 0$$

$$\overset{i}{\sigma} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\Pi i} \sqrt{(1-e'e')} \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{\sigma} = 0$$

$$\overset{i}{a} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\Pi i}\left\{\left(1 + \sqrt{(1-ee)}\right)\phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\phi' i\right\} \quad ; \quad \overset{0}{a} = -\tfrac{3}{2}e$$

---

[1] Abhandlungen der Akademie 1816-17. Mathemat. Klasse S. 55.

$$\overset{-i}{a} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\,\Pi\,i}\left\{\left(1 - \sqrt{(1-ee)}\right)\phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\phi' i\right\}$$

$$\overset{i}{\alpha} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\,i}\left\{\left(1 + \sqrt{(1-e'e')}\right)\phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\phi' i\right\};\quad \overset{0}{\alpha} = 0$$

$$\overset{-i}{\alpha} = -\frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\,i}\left\{\left(1 - \sqrt{(1-e'e')}\right)\phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\phi' i\right\}$$

Die Zahlenwerthe von $\overset{i}{C'}$ und $\overset{i}{S'}$ leitet man aus den bekannten Coefficienten der Reihenentwickelung der Mittelpunktsgleichung nach [27] und [28] ab.

9.

In den meisten vorkommenden Fällen werden die Ausdrücke von δr, δv, δs sehr schnell convergiren, wenn man sie in Reihen entwickelt, welche nach den Potenzen der Excentricitäten und der Neigung fortschreiten; diese Reihen erhält man, wenn man die eben bestimmten Coefficienten nach den Potenzen von e, e', I schreibt und in die Ausdrücke [17], [19] und [20] setzt. Durch eine doppelt, sowohl nach dieser, als noch nach einer andern Art, geführte Rechnung habe ich diese Reihen bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung incl. entwickelt, und führe das Resultat davon hier an; wenn die höheren Ordnungen noch merkliche Werthe haben, so ist es bequemer, nach der oben entwickelten strengen Methode zu rechnen.

$$[32]\ldots \delta r = m\cdot\frac{a^3}{a'a'}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\,\sqrt{(1-e'e')}\times$$

$$\left(\begin{array}{l}
\mathrm{Cos}\,(\mu-\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{2}\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{4}{\nu-1}-\frac{1}{\nu-2}+\frac{ee}{2}\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{3}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}\right.\right.\\
\qquad\qquad\left.\left.+\frac{1}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}+\frac{6}{(\nu-2)^2}\right)\right\}\\
+\mathrm{Cos}\,(\ \ -\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{4}e\left\{\frac{1}{\nu+1}+\frac{6}{\nu}-\frac{5}{\nu-1}-\frac{2}{\nu-2}+\frac{6}{(\nu-1)^2}\right\}\\
+\mathrm{Cos}\,(2\mu-\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{4}e\left\{-\frac{6}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{10}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}-\frac{6}{(\nu-1)^2}\right\}\\
+\mathrm{Cos}\,(\mu-2\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{2}e'\left\{-\frac{3}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{8}{2\nu-1}\right\}\\
+\mathrm{Cos}\,(\mu+\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{16}e'e'\left\{\ \frac{3}{\nu}-\frac{4}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}\right\}
\end{array}\right.$$

$$+\text{Cos}\,(-\mu-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{16}\,ee\left\{\frac{2}{\nu+2}-\frac{8}{\nu+1}+\frac{27}{\nu}-\frac{12}{\nu-1}-\frac{9}{\nu-2}+\frac{24}{(\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Cos}\,(3\mu-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{16}\,ee\left\{-\frac{27}{\nu}+\frac{4}{\nu-1}-\frac{9}{\nu-2}+\frac{48}{\nu-3}-\frac{16}{\nu-4}-\frac{24}{(\nu-1)^2}-\frac{24}{(\nu-2)^2}\right\}$$

$$+\text{Cos}\,(-2\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{+\frac{3}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{2\nu+1}-\frac{5}{2\nu-1}+\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Cos}\,(2\mu-2\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu-1}-\frac{1}{2\nu-1}-\frac{3}{2\nu-3}-\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Cos}\,(\mu-3\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{27}{16}\,e'e'\left\{\frac{1}{\nu}-\frac{4}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu-2}\right\}$$

$$+\text{Cos}\,(\mu+\mu'+\omega+\omega')\,\tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{4}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}\right\}$$

$$[33]\ldots\ \delta v = m\cdot\frac{a\,a}{a'\,a'}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\,\sqrt{(1-e'e')}\ \times$$

$$\text{Sin}\,(\mu-\mu'+\omega-\omega')\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}-\frac{1}{\nu-2}+\frac{3}{(\nu-1)^2}+\frac{ee}{8}\left(-\frac{5}{\nu+1}+\frac{4}{\nu-1}+\frac{16}{\nu-2}-\frac{15}{\nu-3}-\frac{12}{(\nu-1)^2}+\frac{24}{(\nu-2)^2}\right)\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{4}\,e\left\{-\frac{2}{\nu+1}+\frac{9}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}-\frac{5}{\nu-2}+\frac{12}{(\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(2\mu-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{4}\,e\left\{\frac{15}{\nu}-\frac{6}{\nu-1}-\frac{3}{\nu-2}-\frac{6}{\nu-3}+\frac{12}{(\nu-1)^2}+\frac{12}{(\nu-2)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(\mu-2\mu'+\omega-\omega')\,e'\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{4}{2\nu-1}-\frac{2}{2\nu-2}+\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(\mu+\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{8}\,e'e'\left\{\frac{1}{\nu+2}+\frac{2}{\nu+1}-\frac{3}{\nu}+\frac{3}{(\nu+1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(-\mu-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{8}\,ee\left\{-\frac{2}{\nu+2}-\frac{1}{\nu+1}+\frac{21}{\nu}-\frac{5}{\nu-1}-\frac{13}{\nu-2}-\frac{3}{(\nu+1)^2}+\frac{30}{(\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(3\mu-\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{8}\,ee\left\{\frac{39}{\nu}-\frac{15}{\nu-1}-\frac{5}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}-\frac{16}{\nu-4}+\frac{30}{(\nu-1)^2}+\frac{24}{(\nu-2)^2}+\frac{27}{(\nu-3)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(-2\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{-\frac{2}{2\nu+1}+\frac{9}{2\nu}-\frac{2}{2\nu-1}-\frac{5}{2\nu-2}+\frac{12}{(2\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(2\mu-2\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{\frac{15}{2\nu}-\frac{6}{2\nu-1}-\frac{3}{2\nu-2}-\frac{6}{2\nu-3}+\frac{12}{(2\nu-1)^2}+\frac{12}{(2\nu-2)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(\mu-3\mu'+\omega-\omega')\,\tfrac{27}{8}\,e'e'\left\{-\frac{1}{\nu}+\frac{2}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu-2}-\frac{5}{(3\nu-1)^2}\right\}$$

$$+\text{Sin}\,(\mu+\mu'+\omega+\omega')\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}I^2\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{2}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{3}{(\nu+1)^2}\right\}$$

$$[34] \ldots \delta s = m \cdot \frac{aa}{a'a'} \frac{\operatorname{Sin} I}{2} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Sin}(\mu' + \omega') \left\{\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu-1}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(2\mu' + \omega') \; 2e' \left\{\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{2\nu+1}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(\mu + \mu + \omega') \; \frac{e}{2} \left\{-\frac{2}{\nu+1} + \frac{3}{\nu} - \frac{2}{\nu-1} + \frac{1}{\nu+2}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(-\mu + \mu' + \omega') \cdot \frac{e}{2} \left\{\frac{2}{\nu+1} - \frac{3}{\nu} + \frac{2}{\nu-1} - \frac{1}{\nu-2}\right\} \end{array}\right.$$

10.

Obgleich die immer convergirende Reihe [31] zu der Berechnung der Zahlenwerthe von I_k^h hinreicht und daher für die Aufgabe, welche aufgelöset werden sollte, von dieser Seite nichts zu wünschen übrig bleibt, so glaube ich doch diese Gelegenheit benutzen zu dürfen, um über die bestimmten Integrale, welche hier angewandt worden sind, etwas zu sagen.

Nicht nur die Mittelpunktsgleichung und die Gröfsen

$$\operatorname{Cos}\phi,\ \operatorname{Sin}\phi,\ r\operatorname{Cos}\phi,\ r\operatorname{Sin}\phi,\ \frac{1}{rr}\operatorname{Cos}\phi,\ \frac{1}{rr}\operatorname{Sin}\phi$$

führen in ihrer Entwickelung auf diese bestimmten Integrale, sondern dieses ist auch der Fall bei

$$\log r,\ r^n,\ r^n \operatorname{Cos} m\phi,\ r^n \operatorname{Sin} m\phi,\ r^n \operatorname{Cos} m\varepsilon,\ r^n \operatorname{Sin} m\varepsilon$$

immer wenn n und m ganze, entweder positive oder negative Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, sind. Da die meisten Probleme der physischen Astronomie auf solche Reihenentwickelungen zurückführen, so ist eine genauere Kenntnifs dieser Integrale wünschenswerth.

Ich werde, der Kürze wegen, die vier Integrale, von 0 bis 2π genommen, folgendermafsen bezeichnen:

$$\frac{2\pi}{e} \mathrm{L} = \int \operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos} \varepsilon \, d\varepsilon; \quad \frac{2\pi}{e} \mathrm{L}' = \int \operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$\frac{2\pi}{e} \mathrm{M} = \int \frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos} \varepsilon \, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon}; \quad \frac{2\pi}{e} \mathrm{M}' = \int \frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon \, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon}$$

und zuerst zeigen, dafs die Entwickelung der angeführten Gröfsen von denselben abhängt.

Bezeichnet man den Coefficienten von Cos $i\mu$ in der Entwickelung des Logarithmen von r durch $\overset{i}{H}$ und nimmt man denselben so, dafs die Reihe nicht nur alle positiven ganzen i, sondern auch die negativen enthält, so hat man

$$2\pi \overset{i}{H} = \int \log\, r\, \mathrm{Cos}\, i\mu \cdot d\mu$$
$$= \frac{1}{i} \log\, r\, \mathrm{Sin}\, i\mu - \frac{e}{i} \int \frac{\mathrm{Sin}\, i\mu \cdot \mathrm{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon}$$

also, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$[35] \ldots\ldots\ldots \overset{i}{H} = -\frac{1}{i} M'$$

Für $i = 0$ erhält man einen logarithmischen Ausdruck; man hat nämlich, wenn man

$$\frac{e}{1 + \sqrt{(1-ee)}}$$

durch λ bezeichnet und die halbe grofse Axe $= 1$ annimmt,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ 1 + 2\lambda\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon + 2\lambda^2\, \mathrm{Cos}\, 2\varepsilon + 2\lambda^3\, \mathrm{Cos}\, 3\varepsilon + \ldots \right\}$$

und wenn man mit $dr = e\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon$ multiplicirt und integrirt

$$\log r = c - 2 \left\{ \lambda\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon + \tfrac{1}{2} \lambda^2\, \mathrm{Cos}\, 2\varepsilon + \tfrac{1}{3} \lambda^3\, \mathrm{Cos}\, 3\varepsilon + \ldots \right\},$$

zur Bestimmung der Constante c ist, für $\varepsilon = 0$

$$\log(1-e) = c - 2 \left\{ \lambda + \tfrac{1}{2} \lambda^2 + \tfrac{1}{3} \lambda^3 + \ldots \right\} = c + 2l\,(1-\lambda)$$

also

$$\log r = l \frac{1-e}{(1-\lambda)^2} - 2 \left\{ \lambda\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon + \tfrac{1}{2} \lambda^2\, \mathrm{Cos}\, 2\varepsilon + \tfrac{1}{3} \lambda^3\, \mathrm{Cos}\, 3\varepsilon + \ldots \right\}$$

und wenn man dieses mit $d\mu = (1 - e\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon)\, d\varepsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$[36] \ldots\ldots\ldots \overset{0}{H} = l \frac{1-e}{(1-\lambda)^2} + \lambda e = l \frac{1 + \sqrt{(1-ee)}}{2} + \frac{ee}{1 + \sqrt{(1-ee)}}$$

Den Coefficienten von Cos $i\mu$ in der Entwickelung der ganzen Potenzen des Radiusvectors $= r^n$, bezeichne ich durch $C^{(n)}$; ich werde zuerst die vier Integrale durch diese Coefficienten ausdrücken und dann eine allgemeine Relation zwischen den zu verschiedenen Potenzen von r gehörigen C geben, woraus denn hervorgehen wird, dafs $C^{(n)}$ jedesmal auf diese Integrale zurückgeführt werden kann.

Man hat

$$1 \ldots \int \text{Cos}\, i\mu\, \text{Cos}\, \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{e}\int \text{Cos}\, i\mu\, (1-r)\, d\varepsilon = \frac{2\pi}{e}\, C^{(-1)}$$

wovon $i = 0$ ausgenommen ist.

$$2 \ldots \int \text{Sin}\, i\mu\, \text{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{r}{e}\, \text{Sin}\, i\mu - \frac{i}{e}\int rr\, \text{Cos}\, i\mu\, d\varepsilon = -\frac{2\pi}{e}\, i\, C^{(1)}$$

$$3 \ldots \int \frac{\text{Cos}\, i\mu\, \text{Cos}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\, \text{Cos}\, \varepsilon} = \frac{1}{e}\int \text{Cos}\, i\mu\, \left(\frac{1}{r} - 1\right) d\varepsilon = \frac{2\pi}{e}\left\{- C^{(-1)} + C^{(-2)}\right\}$$

$$4 \ldots \int \frac{\text{Sin}\, i\mu\, \text{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\, \text{Cos}\, \varepsilon} = -\frac{1}{i}\, \frac{\text{Cos}\, i\mu\, \text{Sin}\, \varepsilon}{(1 - e\, \text{Cos}\, \varepsilon)^2} + \frac{1}{i}\int \text{Cos}\, i\mu \cdot d\left(\frac{\text{Sin}\, \varepsilon}{rr}\right)$$

wenn man im letzten Gliede wirklich differentiirt und Sin ε^2 durch r eliminirt, so erhält man, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$\int \frac{\text{Sin}\, i\mu\, \text{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\, \text{Cos}\, \varepsilon} = \frac{1}{ie}\int \text{Cos}\, i\mu\, d\varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{rr} + \frac{2(1-ee)}{r^3}\right)$$

oder

$$= \frac{2\pi}{e} \cdot \frac{1}{i}\left\{C^{(-2)} - 3\, C^{(-3)} + 2(1-ee)\, C^{(-4)}\right\}$$

Die oben erwähnte allgemeine Relation erhält man, wenn man den zweiten Differentialquotienten von r^n, vor und nach der Entwickelung in die Reihe, vergleicht; man hat nämlich dadurch

$$\frac{d^2 r^n}{d\mu^2} = -n \cdot (n-1)\, r^{n-2} + n\, (2n-3)\, r^{n-3} - n\, (n-2)\, (1-ee)\, r^{n-4}$$
$$= -\Sigma\, ii\, C^{(n)}\, \text{Cos}\, i\mu$$

folglich

$$[37] \ldots 0 = ii\, C^{(n)} - n(n-1)\, C^{(n-2)} + n\, (2n-3)\, C^{(n-3)} - n\, (n-2)\, (1-ee)\, C^{(n-4)}$$

und diese Relation, verbunden mit den vorher gegebenen vier Sätzen, bestimmt alle $C^{(n)}$. Für verschiedene Werthe von n findet man nämlich:

$$
\begin{array}{llllll}
n = -2 \ldots . 0 = ii\, C^{(-2)} & - 6\, C^{(-4)} & + 14\, C^{(-5)} & - 8\,(1-ee)\, C^{(-6)} \\
n = -1 \ldots . 0 = ii\, C^{(-1)} & - 2\, C^{(-3)} & + 5\, C^{(-4)} & - 3\,(1-ee)\, C^{(-5)} \\
n = 0 \ldots . 0 = ii\, C^{(0)} & & & \\
n = +1 \ldots . 0 = ii\, C^{(1)} & * & - C^{(-2)} & + (1-ee)\, C^{(-3)} \\
n = +2 \ldots . 0 = ii\, C^{(2)} & - 2\, C^{(0)} & + 2\, C^{(-1)} & * \\
n = +3 \ldots . 0 = ii\, C^{(3)} & - 6\, C^{(1)} & + 9\, C^{(0)} & - 3\,(1-ee)\, C^{(-1)} \\
n = +4 \ldots . 0 = ii\, C^{(4)} & - 12\, C^{(2)} & + 20\, C^{(1)} & - 8\,(1-ee)\, C^{(0)}
\end{array}
$$

u. s. w.

Ferner hat man die vier Sätze

$$
[38] \ldots . \begin{cases} L = \quad C^{(-1)} & ; \; L' = -i\, C^{(1)} \\ M = -\, C^{(-1)} + C^{(-2)} & ; \; M' = \frac{1}{i} \left\{ C^{(-2)} - 3\, C^{(-3)} + 2\,(1-ee)\, C^{(-4)} \right\} \end{cases}
$$

so dafs die Verbindung derselben mit den eben angeführten Gleichungen sowohl hinreichend als nothwendig ist, um alle C zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
C^{(-4)} &= \left\{ (2+ee)\, L + 3\, i\, L' + (2+ee)\, M + i\,(1-ee)\, M' \right\} : 2\,(1-ee)^2 \\
C^{(-3)} &= \left\{ L + iL' + M \right\} : (1-ee) \\
C^{(-2)} &= L + M \\
C^{(-1)} &= L \\
C^{(1)} &= -\frac{1}{i}\, L' \\
C^{(2)} &= -\frac{2}{ii}\, L \\
C^{(3)} &= \frac{3\,(1-ee)}{ii}\, L - \frac{6}{i^3}\, L' \\
C^{(4)} &= -\frac{24}{i^4}\, L - \frac{20}{i^3}\, L'
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Für $i = 0$ hat man, statt der Relation [37], die folgende

[39]... $0 = (n+1)\, C^{(n)} - (2n+1)\, C^{(n-1)} + (1-ee)\, n\, C^{(n-2)}$

und diese, verbunden mit

$$C^{(0)} = 1\,;\quad C^{(-1)} = 1\,;\quad C^{(-2)} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}$$

giebt alle übrigen C.

Dafs auch $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ und $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ von den vier Integralen abhängen, läfst sich am leichtesten dadurch zeigen, dafs man diese Ausdrücke von ϕ befreiet und dagegen r einführt. Man hat nämlich $\operatorname{Cos} m\phi$ gleich einer ganzen rationalen Function von $\operatorname{Cos}\phi = \frac{1-ee}{er} - \frac{1}{e}$, wodurch $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ sich in eine Reihe von Gliedern, von der Form $\mathrm{F} \cdot r^f$ verwandelt, deren jedes daher, in seiner Entwickelung, den Coefficienten von $\operatorname{Cos} i\mu = \mathrm{F} \cdot C^{(f)}$ giebt; $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ ist dagegen gleich einer Reihe von Gliedern von der Form $\mathrm{F}\, r^f \operatorname{Sin} \phi$, oder

$$\mathrm{F}\,\frac{\sqrt{(1-ee)}}{e} \cdot \frac{r^f dr}{d\mu} = \mathrm{F}\,\frac{\sqrt{(1-ee)}}{e\,(f+1)}\;\frac{d \cdot r^{f+1}}{d\mu}$$

und der Coefficient von $\operatorname{Sin} i\mu$ daher

$$= -\mathrm{F} \cdot \frac{i\sqrt{(1-ee)}}{e\,(f+1)}\, C^{(f+1)}.$$

Eben so wie $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ und $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ verhalten sich in dieser Beziehung $r^n \operatorname{Cos} m\varepsilon$ und $r^n \operatorname{Sin} m\varepsilon$. Es geht also hieraus hervor, dafs alle Entwickelungen der ganzen Potenzen des Radius-vectors, oder der Producte dieser Potenzen in Cosinusse oder Sinusse der Vielfachen der Anomalien, von den vier Integralen abhängen. Die zweckmäfsigsten Arten, die Reduction wirklich zu machen, wird man aus den unten vorkommenden weiteren Untersuchungen über die Integrale ableiten.

11.

Was die beiden ersten Integrale L und L′ betrifft, so ist ihre Reduction auf I_k^h oben [29] und [30] schon gegeben; wir werden also nur diese transcendente Function näher untersuchen dürfen.

Man hat

$$\text{Cos}\left((i+1)\,\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon\right) + \text{Cos}\left((i-1)\,\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon\right) = 2\,\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,\text{Cos}\,\varepsilon$$

und wenn man das letzte Glied

$$\frac{2i}{k}\,\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon) - \frac{2}{k}\,\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,\,(i - k\,\text{Cos}\,\varepsilon)$$

schreibt, mit $d\varepsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$[40] \ldots\ldots\ldots\; 0 = k\,\text{I}_k^{i-1} - 2i\,\text{I}_k^i + k\,\text{I}_k^{i+1}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daſs man durch zwei Functionen dieser Art alle übrigen ausdrücken kann, und daſs man daher nur zwei, z. B.

$$\text{I}_k^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{k^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \text{etc.}\ldots$$

$$\text{I}_k^1 = \frac{2k}{2^2} - \frac{4k^3}{(2\cdot 4)^2} + \frac{6k^5}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} - \frac{8k^7}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)^2} + \text{etc.}\ldots$$

zu kennen braucht, um alle I_k^i dadurch zu finden; ferner daſs

$$[41] \ldots\ldots\ldots\; \text{I}_k^{-i} = (-1)^i\;\text{I}_k^i$$

ist, so daſs also nur positive ganze i betrachtet werden dürfen.

Den Ausdruck von I_k^i durch I_k^0 und I_k^1 erhält man durch die Eigenschaften der Kettenbrüche. Man hat nämlich aus [40]

$$\frac{\text{I}_k^i}{\text{I}_k^{i-1}} = \cfrac{\frac{k}{2i}}{1 - \frac{k}{2i}\cdot\frac{\text{I}_k^{i+1}}{\text{I}_k^i}}$$

und wenn man dieses fortsetzt

$$[42] \ldots \frac{\text{I}_k^i}{\text{I}_k^{i-1}} = \cfrac{\frac{k}{2i}}{1 - \cfrac{\frac{kk}{2i\,.\,2i+2}}{1 - \cfrac{\frac{kk}{2i+2\,.\,2i+4}}{\begin{matrix}\vdots\\ \hline 1 - \cfrac{\frac{kk}{2i+2h-4\,.\,2i+2h-2}}{1 - \frac{k}{2i+2h-2}\cdot\frac{\text{I}_k^{i+h}}{\text{I}_k^{i+h-1}}}\end{matrix}}}}$$

Für $h = \infty$ giebt dieser Kettenbruch das Verhältniſs zweier aufeinander folgenden Functionen unabhängig von anderen;

für $i = 1$ und $h = i - 1$ giebt er

$$[43] \ldots \frac{I_k^1}{I_k^0} = \cfrac{\frac{k}{2}}{1 - \cfrac{\frac{kk}{2.4}}{1 - \cfrac{\frac{kk}{4.6}}{\vdots \over 1 - \cfrac{\frac{kk}{2i-4.2i-2}}{1 - \frac{k}{2i-2} \cdot \frac{I_k^i}{I_k^{i-1}}}}}}$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch, bis zu einem Gliede $1 - \frac{kk}{2h-2.2h}$ incl. genommen, in einen gewöhnlichen Bruch und bezeichnet man Zähler und Nenner desselben durch $A^{(h)}$ und $B^{(h)}$, so hat man [43]

$$\frac{I_k^1}{I_k^0} = \frac{A^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot A^{(i-2)} I_k^i : I_k^{i-1}}{B^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot B^{(i-2)} I_k^i : I_k^{i-1}}$$

$$\text{oder} \ldots\ldots \frac{I_k^i}{I_k^{i-1}} = \frac{2i-2}{k} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} I_k^1 : I_k^0}{A^{(i-2)} - B^{(i-2)} I_k^1 : I_k^0} \quad ;$$

ähnliche Ausdrücke hat man, wenn man successive i in $i-1$, $i-2$, $i-3 \ldots . 2$ verwandelt; multiplicirt man dieselben miteinander, so ist das Product

$$\frac{I_k^i}{I_k^1} = \frac{2 \cdot 4 \ldots . 2i-2}{k^{i-1}} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} I_k^1 : I_k^0}{- I_k^1 : I_k^0}$$

oder

$$[44] \ldots . I_k^i = \frac{-2 \cdot 4 \ldots . 2i-2}{k^{i-1}} \left\{ A^{(i-1)} I_k^0 - B^{(i-1)} I_k^1 \right\}$$

Eliminirt man I_k^0 und I_k^1 aus drei Ausdrücken dieser Art für I_k^i, $I_k^{i'}$, $I_k^{i''}$, so erhält man eine Gleichung zwischen diesen drei Functionen, welche durch Berücksichtigung der bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche, auf ihre einfachste Gestalt gebracht

werden kann. Wenn aber k ein kleiner Bruch ist, so ist weder [44], noch ein anderer endlicher Ausdruck, welcher ein höheres I_k^i aus zwei niedrigeren ergiebt, zur Rechnung bequem; denn da I_k^i von der Ordnung von k^i ist, so ist $A^{(i-1)} I_k^0 - B^{(i-1)} I_k^1$ von der Ordnung von k^{2i-1} und wird durch den Unterschied zweier Gröſsen von der Ordnung von k gefunden, also mit desto geringerer Genauigkeit, je kleiner k und je gröſser i ist.

Von dieser Unbequemlichkeit frei ist ein anderer, aber unendlicher Ausdruck von I_k^i, welchen man leicht aus [44] ableiten kann. Eliminirt man nämlich I_k^1 aus den Ausdrücken von I_k^i und I_k^{i+1}, so erhält man

$$-\frac{2i}{k} B^{(i)} I_k^i + B^{(i-1)} I_k^{i+1} = \frac{2 \cdot 4 \ldots 2i}{k^i} \left\{ A^{(i-1)} B^{(i)} - A^{(i)} B^{(i-1)} \right\} I_k^0$$

und nach den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hat man

$$A^{(i-1)} B^{(i)} - A^{(i)} B^{(i-1)} = \frac{-k^{2i-1}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2i-2)^2 \cdot 2i};$$

setzt man dieses in den eben gefundenen Ausdruck, so wird er

$$-\frac{2i}{k} B^{(i)} I_k^i + B^{(i-1)} I_k^{i+1} = \frac{-k^{i-1}}{2 \cdot 4 \ldots 2i-2} I_k^0$$

oder.... $I_k^i = \frac{k^i}{2 \cdot 4 \ldots 2i} \cdot \frac{I_k^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)} \frac{k}{2i} \cdot \frac{I_k^{i+1}}{I_k^i}}$

und nach [42]

$$[45] \ldots I_k^i = \frac{k^i}{2 \cdot 4 \ldots 2i} \cdot \cfrac{I_k^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)} \cfrac{\frac{kk}{2i \cdot 2i+2}}{1 - \cfrac{\frac{kk}{2i+2 \cdot 2i+4}}{1 - \text{etc.} \ldots}}}$$

Diese verschiedenen Ausdrücke können, wenn man nicht unmittelbar nach der Reihe [31] rechnen will, benutzt werden, um I_k^i aus I_k^0 und I_k^1 zu erhalten; [44] mit desto geringerem Nachtheile, je gröſser k ist.

12.

Differentiirt man $2\pi\, I_k^i = \int \text{Cos}\,(i\varepsilon - k\ \text{Sin}\ \varepsilon)\, d\varepsilon$ in Beziehung auf k, so erhält man $\int \text{Sin}\,(i\varepsilon - k\ \text{Sin}\ \varepsilon)\ \text{Sin}\ \varepsilon\, d\varepsilon$, also nach [30]

$$\frac{dI_k^i}{dk} = \frac{i}{k}\, I_k^i - I_k^{i+1}, \text{ oder}$$

$$I_k^{i+1} = \frac{i}{k}\, I_k^i - \frac{dI_k^i}{dk}$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}$, so ergiebt sie

$$\frac{I_k^{i+1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} = - \frac{d\left\{\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}\right\}}{d\cdot\frac{kk}{4}} = \frac{d^2\left\{\frac{I_k^{i-1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i-1}}\right\}}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^2} = \text{etc.}$$

oder

$$[46] \ldots\ldots \frac{I_k^{i+h}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+h}} = (-1)^h\, \frac{d^h\left\{\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}\right\}}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^h}$$

wovon ein besonderer Fall ist

$$[47] \ldots\ldots \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} = (-1)^i\, \frac{d^i\cdot I_k^0}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^i}$$

Vergleicht man [40] und [46], so erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welcher I_k^i entspricht:

$$[48] \ldots 0 = \frac{d^2 I_k^i}{dk^2} + \frac{1}{k}\,\frac{dI_k^i}{dk} + I_k^i\left(1 - \frac{ii}{kk}\right)$$

Die durch [46] angegebene Verbindung der verschiedenen, zu einem gleichen Argumente k gehörigen Functionen, ergiebt die endliche Veränderung einer derselben, welche dadurch entsteht, dafs k sich in $k + z$ verwandelt. Man hat nämlich

$$\frac{d\cdot\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{d\left(\frac{kk}{4}\right)} = -\frac{I_k^{i+1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}}$$

$$\frac{d^2\cdot\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{\left(d\frac{kk}{4}\right)^2} = +\frac{I_k^{i+2}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+2}}$$

$$\frac{d^3\cdot\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{\left(d\frac{kk}{4}\right)^3} = -\frac{I_k^{i+3}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+3}}$$

u. s. w.

also nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$\frac{I_{k+z}^i}{\left(\frac{k+z}{2}\right)^i} = \frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} + \frac{d\cdot\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{d\cdot\frac{kk}{4}}\cdot\left(\frac{kz}{2}+\frac{zz}{4}\right) + \frac{d^2\cdot\frac{I_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{2\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^2}\cdot\left(\frac{kz}{2}+\frac{zz}{4}\right)^2 + \text{etc.}\ldots$$

oder

$$[49]\ldots\, I_{(k+z)}^i = \left(1+\frac{z}{k}\right)^i\left\{I_k^i - I_k^{i+1}\cdot z\left(1+\frac{z}{2k}\right) + \frac{I_k^{i+2}}{1\cdot 2}z^2\left(1+\frac{z}{2k}\right)^2 - \text{etc.}\ldots\right\}$$

welche Reihe zur Berechnung und Interpolation einer Tafel dieser Functionen angewendet werden kann und bei der, dieser Abhandlung angehängten, von $k = 0$ bis $k = 3,2$ gehenden, I_k^0 und I_k^1 enthaltenden, benutzt worden ist.

15.

Auf die Function I_k^i lassen sich noch andere Integrale zurückführen, wie aus den folgenden Beispielen hervorgehen wird.

$$[50]\ldots\, \frac{1}{2\pi}\int \text{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\text{Cos}\,\varepsilon - n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\, d\varepsilon = \text{Cos}\, i\alpha\; I_{\sqrt{(mm+nn)}}^i$$

Beweis. Setzt man $m = a\,\text{Sin}\,\alpha$, $n = a\,\text{Cos}\,\alpha$, $\alpha+\varepsilon = z$, so wird der Ausdruck

$$= \frac{1}{2\pi}\int \text{Cos}\,(-i\alpha + iz - a\,\text{Sin}\,z)\,dz = \frac{\text{Cos}\,i\alpha}{2\pi}\int \text{Cos}\,(iz - a\,\text{Sin}\,z)\,dz$$
$$+ \frac{\text{Sin}\,i\alpha}{2\pi}\int \text{Sin}\,(iz - a\,\text{Sin}\,z)\,dz$$

Das letzte Glied dieses Ausdrucks verschwindet aber, wenn man es von 0 bis 2π nimmt; denn $\text{Sin}\,(iz - a\,\text{Sin}\,z)$ läſst sich in eine Reihe von Sinussen der Vielfachen von z verwandeln. Also bleibt nur das erste übrig und dieses giebt

$$\text{Cos}\,i\alpha\; \text{I}_a^i = \text{Cos}\,i\alpha\; \text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}}$$

[51]... $\frac{1}{2\pi}\int \text{Cos}\,i\varepsilon\;\text{Cos}\,(m\,\text{Cos}\,\varepsilon + n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \text{Cos}\,i\alpha\;\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}}$ für ein gerades i und $= 0$ für ein ungerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi}\int \text{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\text{Cos}\,\varepsilon - n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{4\pi}\int \text{Cos}\,(-i\varepsilon - m\,\text{Cos}\,\varepsilon - n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

also nach [41] und [50]

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Cos}\,i\alpha\left\{\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}} + (-1)^i\;\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}}\right\}\; Q.\,E.\,D.$$

[52]... $\frac{1}{2\pi}\int \text{Sin}\,i\varepsilon\;\text{Sin}\,(m\,\text{Cos}\,\varepsilon + n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \text{Cos}\,i\alpha\;\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}}$ für ein ungerades i und $= 0$ für ein gerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi}\int \text{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\text{Cos}\,\varepsilon - n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{4\pi}\int \text{Cos}\,(-i\varepsilon - m\,\text{Cos}\,\varepsilon - n\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

also nach [41] und [50]

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Cos}\,i\alpha\left\{\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}} - (-1)^i\;\text{I}^i_{\sqrt{(mm+nn)}}\right\}\; Q.\,E.\,D.$$

[53]... $\frac{1}{2\pi}\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\;\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1\cdot 3 \ldots\ldots 2i-1}{k^i}\,\text{I}^i_k$

Beweis. Durch theilweise Integration erhält man das Integral

$$\text{Sin}\,\varepsilon\;\text{Cos}\,\varepsilon^{2i-1}\;\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon) - \frac{k}{2i+1}\;\text{Cos}\,\varepsilon^{2i+1}\;\text{Sin}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)$$
$$+ (2i-1)\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i-2}\;\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - (2i-1)\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\;\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$
$$+ \frac{kk}{2i+1}\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i+2}\;\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

wo die beiden ersten Glieder, von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 2\pi$ genommen, verschwinden; man hat also

$$0 = (2i-1)\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i-2}\,\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - 2i\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{kk}{2i+1}\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i+2}\,\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

und wenn man

$$\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2h}\cdot\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon \text{ durch } \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2h-1}{k^h}\,\phi h$$

bezeichnet

$$0 = k\phi\,(i-1) - 2i\,\phi\,(i) + k\phi\,(i+1)$$

Diese Relation stimmt mit [40] überein; allein für $i = 0$ und $i = 1$ findet man $\phi\,0 = \text{I}_k^0$ und $\phi\,1 = \text{I}_k^1$, also auch $\phi\,2 = \text{I}_k^2$, u.s.w. *Q. E. D.*

$$[54]\ldots\int \text{Cos}\,kz\cdot(1-zz)^{\frac{2i-1}{2}}\,dz\begin{bmatrix}\text{von } z=0\\ \text{bis } z=1\end{bmatrix} = \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2i-1}{4k^i}\,\text{I}_k^i$$

Beweis. $\text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)$ enthält nur gerade Potenzen von Cos ε und Sin ε, also nur Cosinusse der geraden Vielfachen von ε; $\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\cdot\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ also, aufser dem in ε multiplicirten Gliede, nur Sinusse der geraden Vielfachen von ε, welche daher, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π, von π bis $\frac{3}{2}\pi$ und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π genommen, verschwinden. Man hat daher

$$\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\text{Cos}(k\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon\begin{bmatrix}\text{von } \varepsilon=0\\ \text{bis } \varepsilon=\frac{1}{2}\pi\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \text{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\text{Cos}\,(k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon\begin{bmatrix}\text{von } \varepsilon=0\\ \text{bis } \varepsilon=2\pi\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2i-1}{4\cdot k^i}\,\text{I}_k^i \text{ nach } [53]$$

Schreibt man z für Sin ε, so erhält man $d\varepsilon = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, $\text{Cos}\,\varepsilon^2 = 1 - zz$ und damit den Satz.

$$[55]\ldots\frac{1}{2\pi}\int e^{n\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,\text{Cos}\,(m\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \text{I}^0_{\sqrt{(mm-nn)}}$$

Beweis. Die ungeraden Potenzen von Cos ε, in der Entwickelung der Exponentialgröfse verschwinden aus dem Integrale; man hat dasselbe daher

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \left\{ 1 + \frac{n^2}{\Pi 2} \operatorname{Cos} \varepsilon^2 + \frac{n^4}{\Pi 4} \operatorname{Cos} \varepsilon^4 + \ldots \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{\Pi 2} \operatorname{Sin} \varepsilon^2 + \frac{m^4}{\Pi 4} \operatorname{Sin} \varepsilon^4 - \text{etc.} \ldots \right\}$$

und das allgemeine Glied des Products dieser beiden Reihen

$$= \frac{n^{2i}}{\Pi 2i} \operatorname{Cos} \varepsilon^{2i} - \frac{n^{2i-2}\, m^2}{\Pi (2i-2)\, \Pi 2} \operatorname{Cos} \varepsilon^{2i-2} \operatorname{Sin} \varepsilon^2 + \frac{n^{2i-4}\, m^4}{\Pi (2i-4)\, \Pi 4} \operatorname{Cos} \varepsilon^{2i-4} \operatorname{Sin} \varepsilon^4 - \text{etc.} \ldots;$$

allein $\frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Cos} \varepsilon^{2i-2h} \operatorname{Sin} \varepsilon^{2h} d\varepsilon = \frac{1}{2^{2i}} \cdot \frac{\Pi 2h \cdot \Pi (2i-2h)}{\Pi i \cdot \Pi h \cdot \Pi (i-h)}$ und daher das allgemeine Glied

$$= \frac{1}{2^{2i} (\Pi i)^2} \left\{ n^{2i} - i \cdot n^{2i-2} m^2 + \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2} n^{2i-4} m^4 - \text{etc.} \ldots \right\} = \frac{(n^2 - m^2)^i}{2^{2i} (\Pi i)^2}.$$

Das allgemeine Glied von I_k^0 ist $= (-1)^i \frac{k^{2i}}{2^{2i} (\Pi i)^2}$, woraus, wenn man $\sqrt{(mm-nn)}$ für k schreibt, der Satz folgt.

Man könnte die Anzahl dieser Sätze noch sehr vermehren, auch, durch Verwechselung der Sinus und Cosinus Abänderungen derselben machen, allein ich glaube nicht länger dabei verweilen zu dürfen. Ich bemerke nur noch, dafs die Reihenentwickelungen von $\operatorname{Cos} k \cdot I_k^0$ und $\operatorname{Sin} k \cdot I_k^0$ nach sehr einfachen Gesetzen fortschreiten: man hat nämlich

$$I_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Cos} (k \operatorname{Cos} \varepsilon)\, d\varepsilon; \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Sin} (k \operatorname{Cos} \varepsilon)\, d\varepsilon;$$

durch Multiplication dieser Gleichungen mit

$$\begin{array}{c|c} \operatorname{Cos} k & \operatorname{Sin} k \\ \operatorname{Sin} k & -\operatorname{Cos} k \end{array}$$

findet man

$$\operatorname{Cos} k \cdot I_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Cos} (k - k \operatorname{Cos} \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Cos} (2k \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \varepsilon^2)\, d\varepsilon$$

$$\operatorname{Sin} k \cdot I_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Sin} (k - k \operatorname{Cos} \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Sin} (2k \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \varepsilon^2)\, d\varepsilon$$

und wenn man die beiden letzten Ausdrücke in die Reihen

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon \left\{1 - \frac{(2k)^2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^4}{\Pi 2} + \frac{(2k)^4 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^8}{\Pi 4} - \frac{(2k)^6 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^{12}}{\Pi 6} + \text{etc.}\ldots\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon \left\{2k \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{(2k)^3 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^6}{\Pi 3} + \frac{(2k)^5 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^{10}}{\Pi 5} - \text{etc.}\ldots\right\}$$

entwickelt und jedes Glied derselben von 0 bis 2π nimmt,

$$[56]\ldots\begin{cases}\operatorname{Cos} k \cdot I_k^0 = 1 - \frac{3}{(\Pi 2)^2}k^2 + \frac{3.5.7}{(\Pi 4)^2}k^4 - \frac{3.5.7.9.11}{(\Pi 6)^2}k^6 + \text{etc.}\ldots \\ \operatorname{Sin} k \cdot I_k^0 = k - \frac{3.5}{(\Pi 3)^2}k^3 + \frac{3.5.7.9}{(\Pi 5)^2}k^5 - \frac{3.5.7.9.11.13}{(\Pi 7)^2}k^7 + \text{etc.}\ldots\end{cases}$$

14.

Die Function I_k^0 hat mit den Sinussen und Cosinussen die merkwürdige Eigenschaft gemein, immer wenn ihr Argument k von $2n\pi$ bis zu $(2n+2)\pi$ wächst, zweimal zu verschwinden und dann das Zeichen zu ändern. Ich werde zeigen, daſs I_k^0 von $k = m\pi$ bis $(m + \frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und negativ, wenn m ungerade ist.

Wenn man $\operatorname{Sin}\varepsilon = z$ und $k = \frac{2m+m'}{2}\cdot\pi$ setzt, wo m' einen eigentlichen Bruch bedeutet, so hat man nach der bei [54] gemachten Bemerkung,

$$I_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \operatorname{Cos} \frac{2m+m'}{2}\pi z \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} \begin{bmatrix}\text{von } z=0\\ \text{bis } z=1\end{bmatrix};$$

schreibt man v für $(2m+m')z$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$I_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2}v \cdot \frac{dv}{\sqrt{\left((2m+m')^2 - vv\right)}} \begin{bmatrix}\text{von } v=0\\ \text{bis } v=2m+m'\end{bmatrix}$$

Das Integral, von $v = a$ bis $v = b$ genommen, ist, wenn man $h + u$ für v schreibt

$$= \int \operatorname{Cos}\left(\frac{h\pi}{2} + \frac{\pi}{2}u\right) \frac{du}{\sqrt{\left((2m+m')^2 - (h+u)^2\right)}} \begin{bmatrix}\text{von } u=a-h\\ \text{bis } u=b-h\end{bmatrix}$$

nimmt man nun h nach und nach $= 1, 3, \ldots 2m-1$ und a und b immer $= h-1$ und $h+1$, so ergiebt der letzte Ausdruck

$$\mathrm{I}_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,u\cdot du\left\{\frac{-1}{\sqrt{(\mu\mu-(1+u)^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(3+u)^2)}}-\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{(\mu\mu-(2m-3+u)^2)}}+\frac{(-1)^m}{\sqrt{(\mu\mu-(2m-1+u)^2)}}\right\}\begin{bmatrix}\text{von } u=-1\\ \text{bis } u=+1\end{bmatrix}$$

$$+\frac{2}{\pi}(-1)^m\int\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2}\,u\cdot du}{\sqrt{(\mu\mu-(2m+u)^2)}}\begin{bmatrix}\text{von } u=0\\ \text{bis } u=m'\end{bmatrix}$$

wo μ für $2m+m'$ geschrieben ist. Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind positiv, das letzte offenbar weil $\frac{\pi}{2}\,u$ immer kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, die übrigen, weil ihr positiver Theil gröfser ist als der negative; denn man hat

$$\int\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,u\cdot du}{\sqrt{(\mu\mu-(h+u)^2)}}\begin{bmatrix}\text{von } u=-1\\ \text{bis } u=+1\end{bmatrix}=\int\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,u\cdot du\left\{\frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(h+u)^2)}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(h-u)^2)}}\right\}\begin{bmatrix}\text{von } u=0\\ \text{bis } u=1\end{bmatrix}$$

wo der Nenner des positiven Theils stets kleiner ist als der des negativen. Ferner ist jedes folgende Glied gröfser als das vorhergehende, wegen der immer abnehmenden Nenner; die Summe zweier aufeinander folgenden hat daher das Zeichen des letzten derselben. Wenn m gerade ist, so ist das letzte Glied in der Klammer positiv und daher die Summe aller Glieder positiv; wenn m ungerade ist, so ist das letzte Glied negativ und daher die Summe aller Glieder bis zum zweiten negativ und das erste Glied, so wie das Glied aufser der Klammer, sind gleichfalls negativ.

Diese Eigenschaft kommt der Function I_k^0 nicht allein zu, sondern alle I_k^i besitzen eine ähnliche. Man hat nämlich [46], wenn man, Kürze wegen, I_k^i durch $\left(\frac{k}{2}\right)^i R^{(i)}$ und $\frac{kk}{4}$ durch $\varkappa$ bezeichnet

$$R^{(i+1)} = -\frac{dR^{(i)}}{d\varkappa},$$

woraus folgt, dafs $R^{(i+1)}$ verschwindet wenn $R^{(i)}$ ein Maximum oder Minimum ist; allein zwischen zwei Werthen von k oder $\varkappa$ für welche $R^{(i)}$ verschwindet, liegt nothwendig ein Maximum oder Mi-

nimum, also auch ein verschwindendes $R^{(i+1)}$. Es ist daher klar, dafs I_k^1 eben so oft $= 0$ wird, so oft I_k^0 ein Maximum oder Minimum ist; zwischen zwei Werthen von k für welche I_k^1 verschwindet, liegt immer ein Maximum oder Minimum von R^1, daher ein verschwindendes I_k^2, u. s. w.

13.

Die beiden im 10ten Artikel durch M und M′ bezeichneten Integrale sind weit zusammengesetzter als die beiden anderen L und L′. Eine endliche Relation zwischen einem derselben und der transcendenten Function I_k^i scheint nicht vorhanden zu seyn; allein man kann sehr leicht zeigen, dafs beide sich auf Integrale von der Form

$$\int \frac{\text{Cos}\,(h\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)}{1 - e\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,d\varepsilon \begin{bmatrix}\text{von } \varepsilon = 0 \\ \text{bis } \varepsilon = 2\pi\end{bmatrix}$$

zurückführen lassen. Bezeichnet man dieses Integral durch

$$2\pi \cdot J_k^h,$$

so hat man nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,\text{Cos}\,\varepsilon}{1 - e\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,J_k^{i-1} + \tfrac{1}{2}\,J_k^{i+1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\text{Sin}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,\text{Sin}\,\varepsilon}{1 - e\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,J_k^{i-1} - \tfrac{1}{2}\,J_k^{i+1}$$

woraus für $k = ie$ die Ausdrücke von M und M′ folgen, nämlich

$$[57] \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} \text{M} = \frac{e}{2}\,J_{ie}^{i-1} + \frac{e}{2}\,J_{ie}^{i+1} \\ \text{M}' = \frac{e}{2}\,J_{ie}^{i-1} - \frac{e}{2}\,J_{ie}^{i+1} \end{cases}$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,\text{Cos}\,\varepsilon}{1 - e\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,d\varepsilon = -\frac{1}{2\pi e}\int \text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$+ \frac{1}{2\pi e}\int \frac{\text{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\text{Sin}\,\varepsilon)}{1 - e\,\text{Cos}\,\varepsilon}\,d\varepsilon = -\frac{1}{e}\,I_k^i + \frac{1}{e}\,J_k^i$$

und die Verbindung dieses Ausdrucks mit dem vorher für dasselbe Integral gefundenen giebt

$$[58] \ldots\ldots\ldots\ldots\, \mathrm{I}_k^i = -\frac{e}{2} J_k^{i-1} + J_k^i - \frac{e}{2} J_k^{i+1}$$

woraus also hervorgeht, dafs jedes J_k^i durch I_k^0, I_k^1, J_k^0 und J_k^1 gefunden werden kann. Es wäre also nöthig, noch J_k^0 und J_k^1 näher zu untersuchen, allein es ist mir nicht gelungen, diese beiden transcendenten Functionen, welche die beiden Argumente e und k haben, auf andere, nur von Einem Argumente abhängige, welche in eine Tafel gebracht werden könnten, zurückzuführen.

Die Methode, das Integral J_k^i in eine Reihe zu entwickeln, habe ich in meiner Abhandlung über das Keplersche Problem gegeben; hier theile ich eine zweite Reihenentwicklung mit, welche die Tafel für I_k^0 und I_k^1 voraussetzt und in allen Fällen convergirt. Man hat bekanntlich

$$\frac{1}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ 1 + 2\lambda \operatorname{Cos} \varepsilon + 2\lambda^2 \operatorname{Cos} 2\varepsilon + 2\lambda^3 \operatorname{Cos} 3\varepsilon + \ldots \right.$$

wo

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{(1-ee)}};$$

multiplicirt man diese Reihe mit $\operatorname{Cos}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin} \varepsilon)\, d\varepsilon$ und integrirt von 0 bis 2π, so erhält man:

$$J_k^i = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \mathrm{I}_k^i + \lambda\, \mathrm{I}_k^{i+1} + \lambda^2\, \mathrm{I}_k^{i+2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \lambda\, \mathrm{I}_k^{i-1} + \lambda^2\, \mathrm{I}_k^{i-2} + \ldots \right\}$$

oder anders geschrieben

$$[59] \ldots\ldots J_k^i = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \lambda^i\, \mathrm{I}_k^0 + \lambda^{i-1}\, \mathrm{I}_k^1 + \ldots + \mathrm{I}_k^i \right.$$
$$- \lambda^{i+1}\, \mathrm{I}_k^1 + \lambda^{i+2}\, \mathrm{I}_k^2 - \lambda^{i+3}\, \mathrm{I}_k^3 + \text{etc.}\ldots$$
$$\left. + \lambda\, \mathrm{I}_k^{i+1} + \lambda^2\, \mathrm{I}_k^{i+2} + \lambda^3\, \mathrm{I}_k^{i+3} + \text{etc.}\ldots \right\}$$

wo die beiden unendlichen Reihen mit einem Gliede der $i + 2^{\text{ten}}$ Ordnung anfangen. Will man von J_k^i zu dem folgenden J_k^{i+1} übergehen, so erhält man eine dazu dienliche Formel, wenn man den eben gegebenen Ausdruck mit λ multiplicirt und das Product von dem ähnlichen Ausdrucke für J_k^{i+1} abzieht; man hat dadurch

$$[60]\ldots J_k^{i+1} = \lambda \cdot J_k^i + \frac{2}{1+\sqrt{(1-ee)}}\left\{I_k^{i+1} + \lambda\, I_k^{i+2} + \lambda^2\, I_k^{i+3} + \text{etc.}\ldots\right\}$$

Will man die beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon \text{ und } \frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

auf die Coefficienten der Reihe für die Mittelpunktsgleichung

$$\phi = \mu + 2A' \operatorname{Sin}\mu + 2A'' \operatorname{Sin} 2\mu + \text{etc.}\ldots$$

zurückführen, so geschieht dieses folgendermaſsen:

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon = -\frac{1}{2\pi e}\int\operatorname{Cos} i\mu\, d\varepsilon + \frac{1}{2\pi e}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu \cdot d\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}$$

wo das letzte Glied der Ausdruck von $\frac{i}{e\sqrt{(1-ee)}}\, A^{(i)}$ ist; man hat daher

$$[61]\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{M} = \frac{i}{\sqrt{(1-ee)}}\, A^{(i)} - I_{i}^{i}\,;$$

ferner hat man

$$\frac{d\phi}{de} = \frac{\operatorname{Sin}\phi}{1-ee}\,(2+e\operatorname{Cos}\phi) = \frac{\sqrt{(1-ee)}\operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\left\{\frac{1}{1-ee} + \frac{1}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\right\};$$

entwickelt man diesen Ausdruck in die Reihe

$$\frac{d\phi}{de} = 2B' \operatorname{Sin}\mu + 2B'' \operatorname{Sin} 2\mu + 2B''' \operatorname{Sin} 3\mu + \text{etc.}\ldots,$$

so ist einerseits

$$B^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon\, d\varepsilon + \sqrt{(1-ee)} \cdot \int\frac{\operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

und andrerseits

$$B^{(i)} = \frac{dA^{(i)}}{de}\,;$$

man hat also, nach [30],

$$[62]\ldots\mathrm{M}' = \frac{e}{\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{dA^{(i)}}{de} - \frac{1}{1-ee}\, I_{i\,e}^{i} + \frac{e}{1-ee}\, I_{i\,e}^{i+1}$$

16.

Bei der Auflösung der Aufgaben der physischen Astronomie, welche auf I_k^i und J_k^i zurückführen, wird k meistentheils nicht

sehr grofs seyn; dann ist der Gebrauch der Tafel für die erste dieser Functionen nicht so zweckmäfsig und bequem, als die directe Berechnung des Reihenausdrucks derselben. Um aber doch von der Anwendung der am Ende dieser Abhandlung abgedruckten Tafeln Beispiele zu geben, werde ich den Coefficienten von Cos 4μ in der Entwickelung von r^3 und den Coefficienten von Sin 4μ in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung, beide für eine Ellipse, deren Excentricität $= 0,35$ ist, mittelst der Tafeln bestimmen.

Der Coefficient von Cos $i\mu$ in der Entwickelung von r^3 ist, nach den Formeln im 10ten Artikel

$$\frac{3(1-ee)}{ii}\,\mathrm{L} - \frac{6}{i^3}\,\mathrm{L}';$$

also für $i = 4$,

$$\tfrac{3}{16}(1-ee)\,e\cdot\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,4\mu\;\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon - \tfrac{3}{32}\,e\,\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sin}\,4\mu\;\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon$$

und nach [29] und [30]

$$= \tfrac{3}{16}(1-ee)\,\mathrm{I}^4_{1,4} - \tfrac{3}{32}\,\mathrm{I}^4_{1,4} + \tfrac{3}{32}\,e\,\mathrm{I}^5_{1,4}$$
$$= \tfrac{2,265}{32}\,\mathrm{I}^4_{1,4} + \tfrac{1,05}{32}\,\mathrm{I}^5_{1,4}$$

Aus den in der Tafel enthaltenen Werthen

$$\mathrm{I}^0_{1,4} = 0,56685\;51204 \text{ und } \mathrm{I}^1_{1,4} = 0,54194\;77139$$

findet man

$$\mathrm{I}^4_{1,4} = 0,00906\;28717 \text{ und } \mathrm{I}^5_{1,4} = 0,00129\;01251$$

und damit den gesuchten Coefficienten $= + 0,00068\;38136$, wobei zu bemerken ist, dafs man ihn verdoppeln mufs, wenn man nur die positiven Vielfachen von μ, in der Entwickelung haben will.

Der Coefficient von Sin $i\mu$ in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung, ist

$$\frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{Cos}\,i\mu\cdot d\varepsilon}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\,J^i_{i,e}$$

also, für $i = 4$ und $e = 0,35$, nach [59],

$$= \frac{1}{4}\Big\{\lambda^4\, I^0_{1,4} + \lambda^3\, I^1_{1,4} + \lambda^2\, I^2_{1,4} + \lambda\, I^3_{1,4} + I^4_{1,4}$$
$$- \lambda^5\, I^1_{1,4} + \lambda^6\, I^2_{1,4} - \lambda^7\, I^3_{1,4} + \text{etc.} \ldots .$$
$$+ \lambda\, I^5_{1,4} + \lambda^2\, I^6_{1,4} + \lambda^3\, I^7_{1,4} + \text{etc.} \ldots .\Big\}$$

Man findet,

$$\begin{aligned}
I^0 &= 0,\ 56635\ 51204 \\
I^1 &= 0,\ 54194\ 77139 \\
I^2 &= 0,\ 20735\ 58995 \\
I^3 &= 0,\ 05049\ 77133 \\
I^4 &= 0,\ 00906\ 28717 \\
I^5 &= 0,\ 00129\ 01251 \\
I^6 &= 0,\ 00015\ 23073 \\
I^7 &= 0,\ 00001\ 53661 \\
I^8 &= 0,\ 00000\ 13538
\end{aligned}$$

und hiermit

$\lambda^4\, I^0 =$	$+$ 0, 00060 45751	$-\lambda^5\, I^1 =$	$-$ 0, 00010 44552	$\lambda\, I^5 =$	$+$ 0, 00023 31451
$\lambda^3\, I^1 =$	0, 00319 84608	$+\lambda^6\, I^2 =$	$+$ 72224	$\lambda^2\, I^6 =$	$+$ 49740
$\lambda^2\, I^2 =$	0, 00677 18213	$-\lambda^7\, I^3 =$	$-$ 3179	$\lambda^3\, I^7 =$	$+$ 907
$\lambda\, I^3 =$	0, 00912 57015	$+\lambda^8\, I^4 =$	$+$ 103	$\lambda^4\, I^8 =$	$+$ 14
$I^4 =$	0, 00906 28717	$-\lambda^9\, I^5 =$	$-$ 3		
	$+$ 0, 02876 34304		$-$ 0, 00009 75407		$+$ 0, 00023 82112

Die Summe aller drei Theile ist 0, 02890 41009 und daher der gesuchte Coefficient = 0, 00722 60252 = 24′ 50″, 47469; er mufs gleichfalls verdoppelt werden, wenn die Entwickelung nur die positiven Vielfachen von μ enthalten soll.

Tafel der Functionen I^0_k und I^1_k.

k	I^0_k	Diff. I.	Diff. II.	I^1_k	Diff. I.	Diff. II.
0, 00	1, 00000 00000	− 2 49998	− 4 99979	0, 00000 00000	+ 499 99375	− 3750
0, 01	0, 99997 50002	− 7 49977	− 4 99921	0, 00499 99375	+ 499 95625	− 7499
0, 02	0, 99990 00025	− 12 49898	− 4 99829	0, 00999 95000	+ 499 88126	− 11249
0, 03	0, 99977 50127	− 17 49727	− 4 99697	0, 01499 83126	+ 499 76877	− 14997
0, 04	0, 99960 00400	− 22 49424	− 4 99527	0, 01999 60003	+ 499 61880	− 18743
0, 05	0, 99937 50976	− 27 48951	− 4 99323	0, 02499 21883	+ 499 43137	− 22488
0, 06	0, 99910 02025	− 32 48274	− 4 99078	0, 02998 65020	+ 499 20649	− 26233
0, 07	0, 99877 53751	− 37 47352	− 4 98798	0, 03497 85669	+ 498 94416	− 29972
0, 08	0, 99840 06399	− 42 46150	− 4 98478	0, 03996 80085	+ 498 64444	− 33713
0, 09	0, 99797 60249	− 47 44628	− 4 98124	0, 04495 44529	+ 498 30731	− 37447
0, 10	0, 99750 15621	− 52 42752	− 4 97730	0, 04993 75260	+ 497 93284	− 41180
0, 11	0, 99697 72869	− 57 40482	− 4 97299	0, 05491 68544	+ 497 52104	− 44910
0, 12	0, 99640 32387	− 62 37781	− 4 96833	0, 05989 20648	+ 497 07194	− 48636
0, 13	0, 99577 94606	− 67 34614	− 4 96326	0, 06486 27842	+ 496 58558	− 52656
0, 14	0, 99510 59992	− 72 30940	− 4 95785	0, 06982 86400	+ 496 06202	− 56075
0, 15	0, 99438 29052	− 77 26725	− 4 95205	0, 07478 92602	+ 495 50127	− 59786
0, 16	0, 99361 02327	− 82 21930	− 4 94590	0, 07974 42729	+ 494 90341	− 63494
0, 17	0, 99278 80397	− 87 16520	− 4 93935	0, 08469 33070	+ 494 26847	− 67196
0, 18	0, 99191 63877	− 92 10455	− 4 93245	0, 08963 59917	+ 493 59651	− 70893
0, 19	0, 99099 53422	− 97 03700	− 4 92517	0, 09457 19568	+ 492 88758	− 74583
0, 20	0, 99002 49722	− 101 96217	− 4 91755	0, 09950 08326	+ 492 14175	− 78269
0, 21	0, 98900 53505	− 106 87972	− 4 90951	0, 10442 22501	+ 491 35906	− 81945
0, 22	0, 98793 65533	− 111 78923	− 4 90116	0, 10933 58407	+ 490 53961	− 85618
0, 23	0, 98681 86610	− 116 69039	− 4 89239	0, 11424 12368	+ 489 68343	− 89281
0, 24	0, 98565 17571	− 121 58278	− 4 88329	0, 11913 80711	+ 488 79062	− 92937
0, 25	0, 98443 59293	− 126 46607	− 4 87382	0, 12402 59773	+ 487 86125	− 96588
0, 26	0, 98317 12686	− 131 33989	− 4 86397	0, 12890 45898	+ 486 89537	− 1 00227
0, 27	0, 98185 78697	− 136 20386	− 4 85377	0, 13377 35435	+ 485 89310	− 1 03859
0, 28	0, 98049 58311	− 141 05763	− 4 84320	0, 13863 24745	+ 484 85451	− 1 07484
0, 29	0, 97908 52548	− 145 90083	− 4 83227	0, 14348 10196	+ 483 77967	− 1 11099
0, 30	0, 97762 62465	− 150 73310	− 4 82098	0, 14831 88163	+ 482 66868	− 1 14704
0, 31	0, 97611 89155	− 155 55408	− 4 80935	0, 15314 55031	+ 481 52164	− 1 18300
0, 32	0, 97456 33747	− 160 36343	− 4 79731	0, 15796 07195	+ 480 33864	− 1 21886
0, 33	0, 97295 97406	− 165 16074	− 4 78495	0, 16276 41059	+ 479 11978	− 1 25463
0, 34	0, 97130 81332	− 169 94569	− 4 77223	0, 16755 53037	+ 477 86515	− 1 29027
0, 35	0, 96960 86763	− 174 71792	− 4 75915	0, 17233 39552	+ 476 57488	− 1 32584
0, 36	0, 96786 14971	− 179 47707	− 4 74571	0, 17709 97040	+ 475 24904	− 1 36126
0, 37	0, 96606 67264	− 184 22278	− 4 73193	0, 18185 21944	+ 473 88778	− 1 39659
0, 38	0, 96422 44986	− 188 95471	− 4 71777	0, 18659 10722	+ 472 49119	− 1 43180
0, 39	0, 96233 49515	− 193 67248	− 4 70330	0, 19131 59841	+ 471 05939	− 1 46690
0, 40	0, 96039 82267			0, 19602 65780		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
0, 40	0, 96039 82267	− 198 37578	− 4 68844	0, 19602 65780	+ 469 59249	− 1 50184
0, 41	0, 95841 44689	− 203 06422	− 4 67326	0, 20072 25029	+ 468 09065	− 1 53671
0, 42	0, 95638 38267	− 207 73748	− 4 65770	0, 20540 34094	+ 466 55394	− 1 57141
0, 43	0, 95430 64519	− 212 39518	− 4 64183	0, 21006 89488	+ 464 98253	− 1 60599
0, 44	0, 95218 25001	− 217 03701	− 4 62560	0, 21471 87741	+ 463 37654	− 1 64045
0, 45	0, 95001 21300	− 221 66261	− 4 60900	0, 21935 25395	+ 461 73609	− 1 67476
0, 46	0, 94779 55039	− 226 27161	− 4 59211	0, 22396 99004	+ 460 06133	− 1 70894
0, 47	0, 94553 27878	− 230 86372	− 4 67483	0, 22857 05137	+ 458 35239	− 1 74296
0, 48	0, 94322 41506	− 235 43855	− 4 55724	0, 23315 40376	+ 456 60943	− 1 77685
0, 49	0, 94086 97651	− 239 99579	− 4 53930	0, 23772 01319	+ 454 83258	− 1 81060
0, 50	0, 93846 98072	− 244 53509	− 4 52103	0, 24226 84577	+ 453 02198	− 1 84417
0, 51	0, 93602 44563	− 249 05612	− 4 50241	0, 24679 86775	+ 451 17781	− 1 87762
0, 52	0, 93353 38951	− 253 55853	− 4 48348	0, 25131 04556	+ 449 30019	− 1 91090
0, 53	0, 93099 83098	− 258 04201	− 4 46420	0, 25580 34575	+ 447 38929	− 1 94400
0, 54	0, 92841 78897	− 262 50621	− 4 44460	0, 26027 73504	+ 445 44529	− 1 97698
0, 55	0, 92579 28276	− 266 95081	− 4 42465	0, 26473 18033	+ 443 46831	− 2 00977
0, 56	0, 92312 33195	− 271 37546	− 4 40441	0, 26916 64864	+ 441 45854	− 2 04239
0, 57	0, 92040 95649	− 275 77987	− 4 38381	0, 27358 10718	+ 439 41615	− 2 07484
0, 58	0, 91765 17662	− 280 16368	− 4 36291	0, 27797 52333	+ 437 34131	− 2 10714
0, 59	0, 91485 01294	− 284 52659	− 4 34167	0, 28234 86464	+ 435 23417	− 2 13925
0, 60	0, 91200 48635	− 288 86826	− 4 32012	0, 28670 09881	+ 433 09492	− 2 17117
0, 61	0, 90911 61809	− 293 18838	− 4 29825	0, 29103 19373	+ 430 92375	− 2 20293
0, 62	0, 90618 42971	− 297 48663	− 4 27606	0, 29534 11748	+ 428 72082	− 2 23449
0, 63	0, 90320 94308	− 301 76269	− 4 25356	0, 29962 83830	+ 426 48633	− 2 26587
0, 64	0, 90019 18039	− 306 01625	− 4 23074	0, 30389 32463	+ 424 22046	− 2 29708
0, 65	0, 89713 16414	− 310 24699	− 4 20762	0, 30813 54509	+ 421 92338	− 2 32807
0, 66	0, 89402 91715	− 314 45461	− 4 18419	0, 31235 46847	+ 419 59531	− 2 35888
0, 67	0, 89088 46254	− 318 63880	− 4 16044	0, 31655 06378	+ 417 23643	− 2 38950
0, 68	0, 88769 82374	− 322 79924	− 4 13640	0, 32072 30021	+ 414 84693	− 2 41992
0, 69	0, 88447 02450	− 326 93564	− 4 11204	0, 32487 14714	+ 412 42701	− 2 45012
0, 70	0, 88120 08886	− 331 04768	− 4 08739	0, 32899 57415	+ 409 97689	− 2 48013
0, 71	0, 87789 04118	− 335 13507	− 4 06245	0, 33309 55104	+ 407 49676	− 2 50996
0, 72	0, 87453 90611	− 339 19752	− 4 03719	0, 33717 04780	+ 404 98680	− 2 53953
0, 73	0, 87114 70859	− 343 23471	− 4 01165	0, 34122 03460	+ 402 44727	− 2 56892
0, 74	0, 86771 47388	− 347 24636	− 3 98582	0, 34524 48187	+ 399 87835	− 2 59811
0. 75	0, 86424 22752	− 351 23218	− 3 95970	0, 34924 36022	+ 397 28024	− 2 62705
0, 76	0, 86072 99534	− 355 19188	− 3 93327	0, 35321 64046	+ 394 65319	− 2 65579
0, 77	0, 85717 80346	− 359 12515	− 3 90657	0, 35716 29365	+ 391 99740	− 2 68432
0, 78	0, 85358 67831	− 363 03172	− 3 87959	0, 36108 29105	+ 389 31308	− 2 71260
0, 79	0, 84995 64659	− 366 91131	− 3 85234	0, 36497 60413	+ 386 60048	− 2 74069
0, 80	0, 84628 73528	− 370 76365	− 3 81477	0, 36884 20461	+ 383 85979	− 2 76851
0, 81	0, 84257 97163	− 374 58842	− 3 79695	0, 37268 06440	+ 381 09128	− 2 79615
0, 82	0, 83883 38321	− 378 38537	− 3 76886	0, 37649 15568	+ 378 29513	− 2 82351
0, 83	0, 83504 99784	− 382 15423	− 3 74048	0, 38027 45081	+ 375 47162	− 2 85067
0, 84	0, 83122 84361	− 385 89471	− 3 71185	0, 38402 92243	+ 372 62095	− 2 87758
0, 85	0, 82736 94890	− 389 60656	− 3 68294	0, 38775 54338	+ 369 74337	− 2 90425
0, 86	0, 82347 34234	− 393 28950	− 3 65375	0, 39145 28675	+ 366 83912	− 2 93069
0, 87	0, 81954 05284	− 396 94325	− 3 62433	0, 39512 12587	+ 363 90843	− 2 95687
0, 88	0, 81557 10959	− 400 56758	− 3 59462	0, 39876 03430	+ 360 95156	− 2 98281
0, 89	0, 81156 54201	− 404 16220	− 3 56466	0, 40236 98586	+ 357 96875	− 3 00854
0, 90	0, 80752 37981			0, 40594 95461		

k	I^0_k	Diff. I.	Diff. II.	I^1_k	Diff. I.	Diff. II.
0, 90	0, 80752 37981	— 407 72686	— 3 53446	0, 40594 95461	+ 354 96021	— 3 03394
0, 91	0, 80344 65295	— 411 26132	— 3 50399	0, 40949 91483	+ 351 92627	— 3 05917
0, 92	0, 79933 39163	— 414 76531	— 3 47326	0, 41301 84110	+ 348 86710	— 3 08410
0, 93	0, 79518 62632	— 418 23857	— 3 44232	0, 41650 70820	+ 345 78300	— 3 10880
0, 94	0, 79100 38775	— 421 68089	— 3 41109	0, 41996 49120	+ 342 67420	— 3 13322
0, 95	0, 78678 70686	— 425 09198	— 3 37964	0, 42339 16540	+ 339 54098	— 3 15739
0, 96	0, 78253 61488	— 428 47162	— 3 34795	0, 42678 70638	+ 336 38359	— 3 18131
0, 97	0, 77825 14326	— 431 81957	— 3 31602	0, 43015 08997	+ 333 20228	— 3 20495
0, 98	0, 77393 32369	— 435 13559	— 3 28385	0, 43348 29225	+ 329 99733	— 3 22834
0, 99	0, 76958 18810	— 438 41944	— 3 25146	0, 43678 28958	+ 326 76899	— 3 25144
1, 00	0, 76519 76866	— 441 67090	— 3 21881	0, 44005 05857	+ 323 51755	— 3 27430
1, 01	0, 76078 09776	— 444 88971	— 3 18598	0, 44328 57612	+ 320 24325	— 3 29687
1, 02	0, 75633 20805	— 448 07569	— 3 15288	0, 44648 81937	+ 316 94638	— 3 31916
1, 03	0, 75185 13236	— 451 22857	— 3 11958	0, 44965 76575	+ 313 62722	— 3 34121
1, 04	0, 74733 90379	— 454 34815	— 3 08606	0, 45279 39297	+ 310 28601	— 3 36295
1, 05	0, 74279 55564	— 457 43421	— 3 05236	0, 45589 67898	+ 406 92306	— 3 38443
1, 06	0, 73822 12143	— 460 48657	— 3 01835	0, 45896 60204	+ 303 53863	— 3 40561
1, 07	0, 73361 63488	— 463 50492	— 2 98421	0, 46200 14067	+ 300 13302	— 3 42654
1, 08	0, 72898 12996	— 466 48913	— 2 94985	0, 46500 27369	+ 296 70648	— 3 44716
1, 09	0, 72431 64083	— 469 43898	— 2 91526	0, 46796 98017	+ 293 25932	— 3 46751
1, 10	0, 71962 20185	— 472 35424	— 2 88052	0, 47090 23949	+ 289 79181	— 3 48757
1, 11	0, 71489 84761	— 475 23476	— 2 84551	0, 47380 03130	+ 286 30424	— 3 50733
1, 12	0, 71014 61285	— 478 08027	— 2 81034	0, 47666 33554	+ 282 79691	— 3 52682
1, 13	0, 70536 53258	— 480 89061	— 2 77501	0, 47949 13245	+ 279 27009	— 3 54601
1, 14	0, 70055 64197	— 483 66562	— 2 73942	0, 48228 40254	+ 275 72408	— 3 56491
1, 15	0, 69571 97635	— 486 40504	— 2 70369	0, 48504 12662	+ 272 15917	— 3 58352
1, 16	0, 69085 57131	— 489 10873	— 2 66776	0, 48776 28579	+ 268 57565	— 3 60181
1, 17	0, 68596 46258	— 491 77649	— 2 63166	0, 49044 86144	+ 264 97384	— 3 61983
1, 18	0, 68104 68609	— 494 40815	— 2 59536	0, 49309 83528	+ 261 35401	— 3 63754
1, 19	0, 67610 27794	— 497 00351	— 2 55891	0, 49571 18929	+ 257 71647	— 3 65497
1, 20	0, 67113 27443	— 499 56242	— 2 52227	0, 49828 90576	+ 254 06150	— 3 67206
1, 21	0, 66613 71201	— 502 08469	— 2 48546	0, 50082 96726	+ 250 38944	— 3 68888
1, 22	0, 66111 62732	— 504 57015	— 2 44849	0, 50333 35670	+ 246 70056	— 3 70538
1, 23	0, 65607 05717	— 507 01864	— 2 41136	0, 50580 05726	+ 242 99517	— 3 72159
1, 24	0, 65100 03853	— 509 43000	— 2 37406	0, 50823 05244	+ 239 27359	— 3 73747
1, 25	0, 64590 60853	— 511 80406	— 2 33662	0, 51062 32603	+ 235 53612	— 3 75307
1, 26	0, 64078 80447	— 514 14068	— 2 29899	0, 51297 86215	+ 231 78305	— 3 76834
1, 27	0, 63564 66379	— 516 43967	— 2 26124	0, 51529 64520	+ 228 01471	— 3 78331
1, 28	0, 63048 22412	— 518 70091	— 2 22334	0, 51757 65991	+ 224 23140	— 3 79797
1, 29	0, 62529 52321	— 520 92425	— 2 18529	0, 51981 89131	+ 220 43343	— 3 81230
1, 30	0, 62008 59896	— 523 10954	— 2 14709	0, 52202 32474	+ 216 62113	— 3 82635
1, 31	0, 61485 48942	— 525 25663	— 2 10875	0, 52418 94587	+ 212 79478	— 3 84004
1, 32	0, 60960 23279	— 527 36538	— 2 07030	0, 52631 74065	+ 208 95474	— 3 85346
1, 33	0, 60432 86741	— 529 43568	— 2 03169	0, 52840 69539	+ 205 10128	— 3 86654
1, 34	0, 59903 43173	— 531 46737	— 1 99296	0, 53045 79667	+ 201 23474	— 3 87931
1, 35	0, 59371 96436	— 533 46033	— 1 95410	0, 53247 03141	+ 197 35543	— 3 89174
1, 36	0, 58838 50403	— 535 41443	— 1 91513	0, 53444 38684	+ 193 46369	— 3 90389
1, 37	0, 58303 08960	— 537 32956	— 1 87603	0, 53637 85053	+ 189 55980	— 3 91568
1, 38	0, 57765 76004	— 539 20559	— 1 83682	0, 53827 41033	+ 185 64412	— 3 92718
1, 39	0, 57226 55445	— 541 04241	— 1 79749	0, 54013 05445	+ 181 71694	— 3 93833
1, 40	0, 56685 51204			0, 54194 77139		

k	I^0_k	Diff. I.	Diff. II.	I^1_k	Diff. I.	Diff. II.
1, 40	0, 56685 51204	− 542 83990	− 1 75804	0, 54194 77139	+ 177 77861	− 3 94918
1, 41	0, 56142 67214	− 544 59794	− 1 71851	0, 54372 55000	+ 173 82943	− 3 95969
1, 42	0, 55598 07420	− 546 31645	− 1 67885	0, 54546 37943	+ 169 86974	− 3 96989
1, 43	0, 55051 75775	− 547 99530	− 1 63911	0, 54716 24917	+ 165 89985	− 3 97976
1, 44	0, 54503 76245	− 549 63441	− 1 59926	0, 54882 14902	+ 161 92009	− 3 98929
1, 45	0, 53954 12804	− 551 23367	− 1 55933	0, 55044 06911	+ 157 93080	− 3 99851
1, 46	0, 53402 89437	− 552 79300	− 1 51929	0, 55201 99991	+ 153 93229	− 4 00740
1, 47	0, 52850 10137	− 554 31229	− 1 47917	0, 55355 93220	+ 149 92489	− 4 01595
1, 48	0, 52295 78908	− 555 79146	− 1 43899	0, 55505 85709	+ 145 90894	− 4 02418
1, 49	0, 51739 99762	− 557 23045	− 1 39868	0, 55651 76603	+ 141 88476	− 4 03209
1, 50	0, 51182 76717	− 558 62913	− 1 35834	0, 55793 65079	+ 137 85267	− 4 03966
1, 51	0, 50624 13804	− 559 98747	− 1 31790	0, 55931 50346	+ 133 81301	− 4 04690
1, 52	0, 50064 15057	− 561 30537	− 1 27740	0, 56065 31647	+ 129 76611	− 4 05381
1, 53	0, 49502 84520	− 562 58277	− 1 23682	0, 56195 08258	+ 125 71230	− 4 06039
1, 54	0, 48940 26243	− 563 81959	− 1 19620	0, 56320 79488	+ 121 65191	− 4 06662
1, 55	0, 48376 44284	− 565 01579	− 1 15549	0, 56442 44679	+ 117 58529	− 4 07257
1, 56	0, 47811 42705	− 566 17128	− 1 11474	0, 56560 03208	+ 113 51272	− 4 07812
1, 57	0, 47245 25577	− 567 28602	− 1 07394	0, 56673 54480	+ 109 43460	− 4 08339
1, 58	0, 46677 96975	− 568 35996	− 1 03307	0, 56782 97940	+ 105 35121	− 4 08829
1, 59	0, 46109 60979	− 569 39303	− 99216	0, 56888 33061	+ 101 26292	− 4 09289
1, 60	0, 45540 21676	− 570 38519	− 95123	0, 56989 59353	+ 97 17003	− 4 09714
1, 61	0, 44969 83157	− 571 33642	− 91022	0, 57086 76356	+ 93 07289	− 4 10104
1, 62	0, 44398 49515	− 572 24664	− 86920	0, 57179 83645	+ 88 97185	− 4 10463
1, 63	0, 43826 24851	− 573 11584	− 82814	0, 57268 80830	+ 84 86722	− 4 10788
1, 64	0, 43253 13267	− 573 94398	− 78704	0, 57353 67552	+ 80 75934	− 4 11079
1, 65	0, 42679 18869	− 574 73102	− 74592	0, 57434 43486	+ 76 64855	− 4 11337
1, 66	0, 42104 45767	− 575 47694	− 70477	0, 57511 08341	+ 72 53518	− 4 11561
1, 67	0, 41528 98073	− 576 18171	− 66361	0, 57583 61859	+ 68 41957	− 4 11753
1, 68	0, 40952 79902	− 576 84532	− 62244	0, 57652 03816	+ 64 30204	− 4 11909
1, 69	0, 40375 95307	− 577 46776	− 58121	0, 57716 34020	+ 60 18295	− 4 12034
1, 70	0, 39798 48594	− 578 04897	− 54003	0, 57776 52315	+ 56 06261	− 4 12124
1, 71	0, 39220 43697	− 578 58900	− 49881	0, 57832 58576	+ 51 94137	− 4 12181
1, 72	0, 38641 84797	− 579 08781	− 45758	0, 57884 52713	+ 47 81956	− 4 12205
1, 73	0, 38062 76016	− 579 54539	− 41636	0, 57932 34669	+ 43 69751	− 4 12195
1, 74	0, 37483 21477	− 579 96175	− 37515	0, 57976 04420	+ 39 57556	− 4 12151
1, 75	0, 36903 25302	− 580 33690	− 33394	0, 58015 61976	+ 35 45405	− 4 12076
1, 76	0, 36322 91612	− 580 67084	− 29273	0, 58051 07381	+ 31 33329	− 4 11964
1, 77	0, 35742 24528	− 580 96357	− 25155	0, 58082 40710	+ 27 21365	− 4 11822
1, 78	0, 35161 28171	− 581 21512	− 21037	0, 58109 62075	+ 23 09543	− 4 11644
1, 79	0, 34580 06659	− 581 42549	− 16921	0, 58132 71618	+ 18 97899	− 4 11434
1, 80	0, 33998 64110	− 581 59470	− 12809	0, 58151 69517	+ 14 86465	− 4 11192
1, 81	0, 33417 04640	− 581 72279	− 8697	0, 58166 55982	+ 10 75273	− 4 10914
1, 82	0, 32835 32361	− 581 80976	− 4591	0, 58177 31255	+ 6 64359	− 4 10605
1, 83	0, 32253 51385	− 581 85567	− 486	0, 58183 95614	+ 2 43754	− 4 10261
1, 84	0, 31671 65818	− 581 86053	+ 3615	0, 58186 49368	− 1 56507	− 4 09885
1, 85	0, 31089 79765	− 581 82438	+ 7711	0, 58184 92861	− 5 66392	− 4 09476
1, 86	0, 30507 97327	− 581 74727	+ 11805	0, 58179 26469	− 9 75868	− 4 09035
1, 87	0, 29926 22600	− 581 62922	+ 15892	0, 58169 50601	− 13 84903	− 4 08557
1, 88	0, 29344 59678	− 581 47030	+ 19976	0, 58155 65698	− 17 93460	− 4 08051
1, 89	0, 28763 12648	− 581 27054	+ 24052	0, 58137 72238	− 22 01511	− 4 07509
1, 90	0, 28181 85594			0, 58115 70727		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
1,90	0, 28181 85594	− 581 03002	+ 28126	0, 58115 70727	− 26 09020	− 4 06936
1,91	0, 27600 82592	− 580 74876	+ 32192	0, 58089 61707	− 30 15956	− 4 06332
1,92	0, 27020 07716	− 580 42684	+ 36251	0, 58059 45751	− 34 22284	− 4 05689
1,93	0, 26439 65032	− 580 06433	+ 40306	0, 58025 23467	− 38 27973	− 4 05018
1,94	0, 25859 58599	− 579 66127	+ 44352	0, 57986 95494	− 42 32991	− 4 04313
1,95	0, 25279 92472	− 579 21775	+ 48391	0, 57944 62503	− 46 37304	− 4 03576
1,96	0, 24700 70697	− 578 73384	+ 52424	0, 57898 25199	− 50 40880	− 4 02807
1,97	0, 24121 97313	− 578 20960	+ 56447	0, 57847 84319	− 54 43687	− 4 02005
1,98	0, 23543 76353	− 577 64513	+ 60464	0, 57793 40632	− 58 45692	− 4 01170
1,99	0, 22966 11840	− 577 04049	+ 64471	0, 57734 94940	− 62 46862	− 4 00306
2,00	0, 22389 07791	− 576 39578	+ 68470	0, 57672 48078	− 66 47168	− 3 99407
2,01	0, 21812 68213	− 575 71108	+ 72458	0, 57606 00910	− 70 46575	− 3 98476
2,02	0, 21236 97105	− 574 98650	+ 76439	0, 57535 54335	− 74 45052	− 3 97515
2,03	0, 20661 98455	− 574 22211	+ 80409	0, 57461 09283	− 78 42567	− 3 96522
2,04	0, 20087 76244	− 573 41802	+ 84370	0, 57382 66716	− 82 39089	− 3 95495
2,05	0, 19514 34442	− 572 57432	+ 88318	0, 57300 27627	− 86 34584	− 3 94439
2,06	0, 18941 77010	− 571 69114	+ 92259	0, 57213 93043	− 90 29023	− 3 93351
2,07	0, 18370 07896	− 570 76855	+ 96185	0, 57123 64020	− 94 22374	− 3 92230
2,08	0, 17799 31041	− 569 80670	+ 1 00102	0, 57029 41646	− 98 14604	− 3 91080
2,09	0, 17229 50371	− 568 80568	+ 1 04008	0, 56931 27042	− 102 05684	− 3 89898
2,10	0, 16660 69803	− 567 76560	+ 1 07900	0, 56829 21358	− 105 95582	− 3 88683
2,11	0, 16092 93243	− 566 68660	+ 1 11781	0, 56723 25776	− 109 84265	− 3 87440
2,12	0, 15526 24583	− 565 56879	+ 1 15650	0, 56613 41511	− 113 71705	− 3 86166
2,13	0, 14960 67704	− 564 41229	+ 1 19503	0, 56499 69806	− 117 57871	− 3 84858
2,14	0, 14396 26475	− 563 21726	+ 1 23346	0, 56382 11935	− 121 42729	− 3 83524
2,15	0, 13833 04749	− 561 98380	+ 1 27174	0, 56260 69206	− 125 26253	− 3 82156
2,16	0, 13271 06369	− 560 71206	+ 1 30990	0, 56135 42953	− 129 08409	− 3 80759
2,17	0, 12710 35163	− 559 40216	+ 1 34789	0, 56006 34544	− 132 89168	− 3 79333
2,18	0, 12150 94947	− 558 05427	+ 1 38576	0, 55873 45376	− 136 68501	− 3 77876
2,19	0, 11592 89520	− 556 66851	+ 1 42347	0, 55736 76875	− 140 46377	− 3 76388
2,20	0, 11036 22669	− 555 24504	+ 1 46183	0, 55596 30498	− 144 22765	− 3 74871
2,21	0, 10480 98165	− 553 78401	+ 1 49845	0, 55452 07733	− 147 97636	− 3 73327
2,22	0, 09927 19764	− 552 28556	+ 1 53569	0, 55304 10097	− 151 70963	− 3 71748
2,23	0, 09374 91208	− 550 74987	+ 1 57279	0, 55152 39134	− 155 42711	− 3 70146
2,24	0, 08824 16221	− 549 17708	+ 1 60973	0, 54996 96423	− 159 12857	− 3 68509
2,25	0, 08274 98513	− 547 56735	+ 1 64649	0, 54837 83566	− 162 81366	− 3 66848
2,26	0, 07727 41778	− 545 92086	+ 1 68309	0, 54675 02200	− 166 48214	− 3 65155
2,27	0, 07181 49692	− 544 23777	+ 1 71953	0, 54508 53986	− 170 13369	− 3 63434
2,28	0, 06637 25915	− 542 51824	+ 1 75577	0, 54338 40617	− 173 76803	− 3 61685
2,29	0, 06094 74091	− 540 76247	+ 1 79187	0, 54164 63814	− 177 38488	− 3 59907
2,30	0, 05553 97844	− 538 97060	+ 1 82776	0, 53987 25326	− 180 98395	− 3 58102
2,31	0, 05015 00784	− 537 14284	+ 1 86347	0, 53806 26931	− 184 56497	− 3 56268
2,32	0, 04477 86500	− 535 27937	+ 1 89901	0, 53621 70434	− 188 12765	− 3 54405
2,33	0, 03942 58563	− 533 38036	+ 1 93437	0, 53433 57669	− 191 67170	− 3 52516
2,34	0, 03409 20527	− 531 44599	+ 1 96951	0, 53241 90499	− 195 19686	− 3 50601
2,35	0, 02877 75928	− 529 47648	+ 2 00448	0, 53046 70813	− 198 70287	− 3 48654
2,36	0, 02348 28280	− 527 47200	+ 2 03924	0, 52848 00526	− 202 18941	− 3 46684
2,37	0, 01820 81080	− 525 43276	+ 2 07381	0, 52645 81585	− 205 65625	− 3 44684
2,38	0, 01295 37804	− 523 35895	+ 2 10819	0, 52440 15960	− 209 10309	− 3 42661
2,39	0, 00772 01909	− 521 25076	+ 2 14234	0, 52231 05651	− 212 52968	− 3 40611
2,40	0, 00250 76833			0, 52018 52682		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
2, 40	+ 0, 00250 76833	− 519 10842	+ 2 17630	0, 52018 52682	− 215 93579	− 3 38529
2, 41	− 0, 00268 34009	− 516 93212	+ 2 21006	0, 51802 59103	− 219 32108	− 3 36424
2, 42	− 0, 00785 27221	− 514 72206	+ 2 24357	0, 51583 26995	− 222 68532	− 3 34295
2, 43	− 0, 01299 99427	− 512 57849	+ 2 27692	0, 51360 58463	− 226 02827	− 3 32138
2, 44	− 0, 01812 47276	− 510 20157	+ 2 31001	0, 51134 55636	− 229 34965	− 3 29957
2, 45	− 0, 02322 67433	− 507 89156	+ 2 34289	0, 50905 20671	− 232 64922	− 3 27749
2, 46	− 0, 02830 56589	− 505 54867	+ 2 37557	0, 50672 55749	− 235 92671	− 3 25516
2, 47	− 0, 03336 11456	− 503 17310	+ 2 40800	0, 50436 63078	− 239 18187	− 3 23258
2, 48	− 0, 03839 28766	− 500 76510	+ 2 44021	0, 50197 44891	− 242 41445	− 3 20976
2, 49	− 0, 04340 05276	− 498 32498	+ 2 47220	0, 49955 03446	− 245 62421	− 3 18669
2, 50	− 0, 04838 37765	− 495 85269	+ 2 50394	0, 49709 41025	− 248 81090	− 3 16336
2, 51	− 0, 05334 23034	− 493 34875	+ 2 53546	0, 49460 59935	− 251 97426	− 3 13981
2, 52	− 0, 05827 57909	− 490 81329	+ 2 56675	0, 49208 62509	− 255 11407	− 3 11601
2, 53	− 0, 06318 39238	− 488 24654	+ 2 59777	0, 48953 51102	− 258 23008	− 3 09198
2, 54	− 0, 06806 63892	− 485 64877	+ 2 62858	0, 48695 28094	− 261 32206	− 3 06769
2, 55	− 0, 07292 28769	− 483 02019	+ 2 65914	0, 48433 95888	− 264 38975	− 3 04321
2, 56	− 0, 07775 30788	− 480 36105	+ 2 68944	0, 48169 56913	− 267 43296	− 3 01845
2, 57	− 0, 08255 66893	− 477 67161	+ 2 71951	0, 47902 13617	− 270 45141	− 2 99349
2, 58	− 0, 08733 34054	− 474 95210	+ 2 74930	0, 47631 68476	− 273 44490	− 2 96831
2, 59	− 0, 09208 29264	− 472 20280	+ 2 77887	0, 47358 23986	− 276 41321	− 2 94288
2, 60	− 0, 09680 49544	− 469 42393	+ 2 80817	0, 47081 82665	− 279 35609	− 2 91724
2, 61	− 0, 10149 91937	− 466 61576	+ 2 83722	0, 46802 47056	− 282 27333	− 2 89140
2, 62	− 0, 10616 53513	− 463 77854	+ 2 86598	0, 46520 19723	− 285 16473	− 2 86529
2, 63	− 0, 11080 31367	− 460 91256	+ 2 89453	0, 46235 03250	− 288 03002	− 2 83903
2, 64	− 0, 11541 22623	− 458 01803	+ 2 92277	0, 45947 00248	− 290 86905	− 2 81251
2, 65	− 0, 11999 24426	− 455 09526	+ 2 95077	0, 45656 13343	− 293 68156	− 2 78580
2, 66	− 0, 12454 33952	− 452 14449	+ 2 97849	0, 45362 45187	− 296 46736	− 2 75887
2, 67	− 0, 12906 48401	− 449 16600	+ 3 00594	0, 45065 98451	− 299 22623	− 2 73175
2, 68	− 0, 13355 65001	− 446 16006	+ 3 03313	0, 44766 75828	− 301 95798	− 2 70441
2, 69	− 0, 13801 81007	− 443 12693	+ 3 06002	0, 44464 80030	− 304 66239	− 2 67688
2, 70	− 0, 14244 93700	− 440 06691	+ 3 08667	0, 44160 13791	− 307 33927	− 2 64915
2, 71	− 0, 14685 00391	− 436 98024	+ 3 11302	0, 43852 79864	− 309 98842	− 2 62122
2, 72	− 0, 15121 98415	− 433 86722	+ 3 13907	0, 43542 81022	− 312 60964	− 2 59311
2, 73	− 0, 15555 85137	− 430 72815	+ 3 16489	0, 43230 20058	− 315 20275	− 2 56478
2, 74	− 0, 15986 57952	− 427 56326	+ 3 19037	0, 42914 99783	− 317 76753	− 2 53630
2, 75	− 0, 16414 14278	− 424 37289	+ 3 21561	0, 42597 23030	− 320 30383	− 2 50761
2, 76	− 0, 16838 51567	− 421 15728	+ 3 24053	0, 42276 92647	− 322 81144	− 2 47873
2, 77	− 0, 17259 67295	− 417 91675	+ 3 26517	0, 41954 11503	− 325 29017	− 2 44968
2, 78	− 0, 17677 58970	− 414 65158	+ 3 28952	0, 41628 82486	− 327 73985	− 2 42047
2, 79	− 0, 18092 24128	− 411 36206	+ 3 31359	0, 41301 08501	− 330 16032	− 2 39106
2, 80	− 0, 18503 60334	− 408 04847	+ 3 33735	0, 40970 92469	− 332 55138	− 2 36149
2, 81	− 0, 18911 65181	− 404 71112	+ 3 36081	0, 40638 37331	− 334 91287	− 2 33172
2, 82	− 0, 19316 36293	− 401 35031	+ 3 38398	0, 40303 46044	− 337 24459	− 2 30184
2, 83	− 0, 19717 71324	− 397 96633	+ 3 40684	0, 39966 21585	− 339 54643	− 2 27173
2, 84	− 0, 20115 67957	− 394 55949	+ 3 42942	0, 39626 66942	− 341 81816	− 2 24152
2, 85	− 0, 20510 23906	− 391 13007	+ 3 45168	0, 39284 85126	− 344 05968	− 2 21110
2, 86	− 0, 20901 36913	− 387 67839	+ 3 47363	0. 38940 79158	− 346 27078	− 2 18054
2, 87	− 0, 21289 04752	− 384 20476	+ 3 49530	0, 38594 52080	− 348 45132	− 2 14984
2, 88	− 0, 21673 25228	− 380 70946	+ 3 51662	0, 38246 06948	− 350 60116	− 2 11898
2, 89	− 0, 22053 96174	− 377 19284	+ 3 53767	0, 37895 46832	− 352 72014	− 2 08796
2, 90	− 0, 22431 15458			0, 37542 74818		

k	I^0_k	Diff. I.	Diff. II.	I^1_k	Diff. I.	Diff. II.
2, 90	— 0, 22431 15458	— 373 65517	+ 3 55840	0, 37542 74818	— 354 80810	— 2 05680
2, 91	— 0, 22804 80975	— 370 09677	+ 3 57879	0, 37187 94008	— 356 86490	— 2 02551
2, 92	— 0, 23174 90652	— 366 51798	+ 3 59891	0, 36831 07518	— 358 89041	— 1 99406
2, 93	— 0, 23541 42450	— 362 91907	+ 3 61868	0, 36472 18477	— 360 88447	— 1 96249
2, 94	— 0, 23904 34357	— 359 30039	+ 3 63815	0, 36111 30030	— 362 84696	— 1 93076
2, 95	— 0, 24263 64396	— 355 66224	+ 3 65730	0, 35748 45334	— 364 77772	— 1 89893
2, 96	— 0, 24619 30620	— 352 00494	+ 3 67612	0, 35383 67562	— 366 67665	— 1 86695
2, 97	— 0, 24971 31114	— 348 32882	+ 3 69464	0, 35016 99897	— 368 54360	— 1 83485
2, 98	— 0, 25319 63996	— 344 63418	+ 3 71283	0, 34648 45537	— 370 37845	— 1 80262
2, 99	— 0, 25664 27414	— 340 92135	+ 3 73069	0, 34278 07692	— 372 18107	— 1 77027
3, 00	— 0, 26005 19549	— 337 19066	+ 3 74822	0, 33905 89585	— 373 95134	— 1 73782
3, 01	— 0, 26342 38615	— 333 44244	+ 3 76545	0, 33531 94451	— 375 68916	— 1 70522
3, 02	— 0, 26675 82859	— 329 67699	+ 3 78234	0, 33156 25535	— 377 39438	— 1 67255
3, 03	— 0, 27005 50558	— 325 89465	+ 3 79889	0, 32778 86097	— 379 06693	— 1 63974
3, 04	— 0, 27331 40023	— 322 09576	+ 3 81513	0, 32399 79404	— 380 70667	— 1 60682
3, 05	— 0, 27653 49599	— 318 28063	+ 3 83103	0, 32019 08737	— 382 31349	— 1 57383
3, 06	— 0, 27971 77662	— 314 44960	+ 3 84660	0, 31636 77388	— 383 88732	— 1 54070
3, 07	— 0, 28286 22622	— 310 60300	+ 3 86185	0, 31252 88656	— 385 42802	— 1 50750
3, 08	— 0, 28596 82922	— 306 74115	+ 3 87675	0, 30867 45854	— 386 93552	— 1 47419
3, 09	— 0, 28903 57037	— 302 86440	+ 3 89134	0, 30480 52302	— 388 40971	— 1 44079
3, 10	— 0, 29206 34377	— 298 97306	+ 3 90556	0, 30092 11331	— 389 85050	— 1 40732
3, 11	— 0, 29505 40783	— 295 06750	+ 3 91948	0, 29702 26281	— 391 25782	— 1 37372
3, 12	— 0, 29800 47533	— 291 14802	+ 3 93304	0, 29311 00499	— 392 63154	— 1 34009
3, 13	— 0, 30091 62335	— 287 21498	+ 3 94627	0, 28918 37345	— 393 97163	— 1 30634
3, 14	— 0, 30378 83833	— 283 26871	+ 3 95918	0, 28524 40182	— 395 27797	— 1 27253
3, 15	— 0, 30662 10704	— 279 30953	+ 3 97173	0, 28129 12385	— 396 55050	— 1 23864
3, 16	— 0, 30941 41657	— 275 33780	+ 3 98393	0, 27732 57335	— 397 78914	— 1 20468
3, 17	— 0, 31216 75437	— 271 35387	+ 3 99583	0, 27334 78421	— 398 99382	— 1 17065
3, 18	— 0, 31488 10824	— 267 35804	+ 4 00735	0, 26935 79039	— 400 16447	— 1 13657
3, 19	— 0, 31755 46628	— 263 35069	+ 4 01855	0, 26535 62592	— 401 30104	— 1 10238
3, 20	— 0, 32018 81697			0, 26134 32488		



Von der Integration der linearen Gleichungen mit partiellen endlichen Differenzen.

Von
H^rn. EYTELWEIN.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 3. Juni 1824.]

§. 1.

Bedeutet ${}^{m}G_{r}$ irgend eine unbekannte Funkzion der veränderlichen Gröſsen m und r, wo m und r jeder ganzen Zahl oder 0 gleich seyn können, so heiſst jede Gleichung in welcher diese Funkzion für verschiedene Werthe von m und r vorkommt, eine Gleichung mit partiellen Differenzen, und man ist im Stande diese Differenzgleichung zu integriren, wenn der Werth der unbekannten Funkzion ${}^{m}G_{r}$ angegeben werden kann. Dergleichen Differenzgleichungen gehören zu den doppelt wiederkehrenden oder recurro-recurrenten Reihen, und sowohl Laplace (*Mémoires sur les suites récurro-récurrentes, Mém. de Mathémat. Tom. VI. Paris* 1774. — *Rechreches sur l'intégration des équations différentielles finies, Mém. de Mathémat. Année* 1773. *Paris* 1776.) als auch Lagrange (*Recherches sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, Année* 1775.) haben zuerst über diese Reihen ausgezeichnete Untersuchungen angestellt, ohne jedoch die erzeugende Funkzion, aus welcher ${}^{m}G_{r}$ entstanden ist, näher zu bestimmen. Man findet zwar in *Arbogast, Calcul des dérivations,* (*Strasbourg* 1800.) dergleichen Untersuchungen; allein abge-

sehen von der dortigen Bezeichnung, wird es nicht unwichtig seyn, die hierher gehörigen Entwickelungen noch auf einem anderen Wege zu erhalten, von welchem ich mir schmeichle, dafs auf demselben die gesuchten Ausdrücke einfach und übersichtlich dargestellt werden.

Weil die partiellen Differenzgleichungnn von der Form

$$^{m}G_{r} + a.\ ^{m}G_{r-1} + b.\ ^{m-1}G_{r} + c.\ ^{m-1}G_{r-1} = f(m; r)$$

am meisten vorkommen, wenn hier $f(m; r)$ irgend eine gegebene Funkzion von m und r bedeutet und a, b, c willkührliche beständige Koeffizienten sind, welche auch einzeln $= 0$ seyn können, so wird man sich hier vorzüglich auf diese Differenzgleichung beschränken; es wird sich aber sehr leicht übersehen lassen, dafs mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes und einer einfachen Bezeichnung der Polynomialkoeffizienten, die Untersuchung auch leicht auf jede andere gegebene Differenzgleichung angewendet werden kann. Uebrigens ist bei den von Lagrange untersuchten Differenzgleichungen durchgängig $f(m; r) = 0$ angenommen, wogegen hier dieser Ausdruck jede beliebige Funkzion von m und r bezeichnen kann.

Bei den folgenden Untersuchungen wird zuerst die Entwickelung gebrochener Funkzionen mit zwei veränderlichen x und y auseinander gesetzt und hiernächst bestimmt, wie gegebene Koeffizientengleichungen welche mit den angeführten Differenzgleichungen einerlei sind, integrirt werden können.

Noch ist zu bemerken, dafs hier zur Vereinfachung, Binomialkoeffizienten wie

$$\text{(I)}\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\,n} \text{ durch } \alpha_{n}$$

bezeichnet werden. Ferner wird man von einer Reihe

$$P = A + A_{1}x + A_{2}x^{2} + A_{3}x^{3} + \ldots\ldots + A_{n}x^{n} + \ldots\ldots$$

den Koeffizienten A_n durch PK_n bezeichnen, um dadurch näher anzudeuten, zu welcher Reihe vorkommende Koeffizienten gehören. Man erhält daher auch

$$\text{(II)}\ P = PK_{0} + PK_{1}\,.\,x + PK_{2}\,.\,x^{2} + PK_{3}\,.\,x^{3} + \ldots + PK_{n}\,.\,x^{n} + \ldots..$$

§. 2.

Man setze

$$\begin{array}{l}
A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_r x^r + \ldots = P \\
{}^1Ay + {}^1A_1 xy + {}^1A_2 x^2 y + {}^1A_3 x^3 y + \ldots + {}^1A_r x^r y + \ldots = P_1 y \\
{}^2Ay^2 + {}^2A_1 xy^2 + {}^2A_2 x^2 y^2 + {}^2A_3 x^3 y^2 + \ldots + {}^2A_r x^r y^2 + \ldots = P_2 y^2 \\
{}^3Ay^3 + {}^3A_1 xy^3 + {}^3A_2 x^2 y^3 + {}^3A_3 x^3 y^3 + \ldots + {}^3A_r x^r y^3 + \ldots = P_3 y^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}^mAy^m + {}^mA_1 xy^m + {}^mA_2 x^2 y^m + {}^mA_3 x^3 y^m + \ldots + {}^mA_r x^r y^m + \ldots = P_m y^m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

und es sei die gebrochene Funkzion

$$\frac{P^1}{1 + ax + by + cxy}$$

zu entwickeln, so ist die allgemeinste Form welche der Zähler P^1 erhalten kann

$$P^1 = P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \ldots + P_m y^m + \ldots\ldots [\mathrm{I}]$$

wenn P; P_1; P_2; .... die oben gegebene Bedeutung behalten.

Setzt man nun ferner:

$$\begin{array}{l}
G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \ldots + G_r x^r + \ldots = Q \\
{}^1Gy + {}^1G_1 xy + {}^1G_2 x^2 y + {}^1G_3 x^3 y + \ldots + {}^1G_r x^r y + \ldots = Q_1 y \\
{}^2Gy^2 + {}^2G_1 xy^2 + {}^2G_2 x^2 y^2 + {}^2G_3 x^3 y^2 + \ldots + {}^2G_r x^r y^2 + \ldots = Q_2 y^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}^mGy^m + {}^mG_1 xy^m + {}^mG_2 x^2 y^m + {}^mG_3 x^3 y^m + \ldots + {}^mG_r x^r y^m + \ldots = Q_m y^m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

und bezeichnet durch Q^1 die Entwickelung der gegebenen gebrochenen Funkzion, also

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{P^1}{1 + ax + by + cxy} = Q^1$$

so ist die allgemeinste Gestalt welche diese Entwickelung erhalten kann

$$Q^1 = Q + Q_1 y + Q^2 y^2 + Q_3 y^3 + \ldots + Q_m y^m + \ldots\ldots [\mathrm{II}]$$

wo A; A_1; A_2; A_3; ...... gegebene und G; G_1; G_2; G_3; ...... noch näher zu bestimmende Koeffizienten bedeuten.

Nun werde $1 + ax = \alpha$ und $b + cx = \beta$ gesetzt, so erhält man wegen (I)

$$Q^1 = \frac{P^1}{\alpha + \beta y} = P^1 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha^3} - \ldots\ldots \pm \frac{\beta^m y^m}{\alpha^{m+1}} \mp \ldots\ldots\right]$$

oder statt P^1 aus [I] den entsprechenden Werth gesetzt, giebt:

$$Q^1 = \frac{P}{\alpha} + \left.\begin{matrix}\frac{P_1}{\alpha} \\ -\frac{P\beta}{\alpha^2}\end{matrix}\right| y + \left.\begin{matrix}\frac{P^2}{\alpha} \\ -\frac{P_1\beta}{\alpha^2} \\ +\frac{P\beta^2}{\alpha^3}\end{matrix}\right| y^2 + \ldots\ldots + \left.\begin{matrix}\frac{P_m}{\alpha} \\ -\frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2} \\ +\frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} \\ \ldots\ldots \\ \pm\frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}\end{matrix}\right| y^m + \ldots\ldots$$

daher wird nach der Bezeichnung §. 1. (II)

$$Q^1 K_m = \frac{P_m}{\alpha} - \frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2} + \frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} - \ldots\ldots \pm \frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}$$

Denkt man sich diese Glieder in Reihen aufgelöst und nach den Potenzen von x geordnet, so findet man den zu x^r gehörigen Koeffizienten oder

$$(Q^1 K_m) K_r = \left(\frac{P_m}{\alpha}\right) K_r - \left(\frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2}\right) K_r + \left(\frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3}\right) K_r - \ldots \pm \left(\frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}\right) K_r \quad \text{[III]}$$

Nun ist $P_m = {}^mA + {}^mA_1 x + {}^mA_2 x^2 + {}^mA_3 x^3 + \ldots + {}^mA_r x^r + \ldots$ also

$$P_{m-n} = {}^{m-n}A + {}^{m-n}A_1 x + {}^{m-n}A_2 x^2 + {}^{m-n}A_3 x^3 + \ldots + {}^{m-n}A_r x^r + \ldots$$

und wenn man setzt

$$\frac{\beta^n}{\alpha^{n+1}} = \frac{(b+cx)^n}{(1+ax)^{n+1}} = {}^nB + {}^nB_1 x + {}^nB_2 x^2 + {}^nB_3 x^3 + \ldots + {}^nB_r x^r + \ldots \quad \text{[IV]}$$

so wird

$$\frac{P_{m-n}\beta^n}{\alpha^{n+1}} = {}^{m-n}A\,.\,{}^nB + \left.\begin{matrix} {}^{m-n}A_1\,.\,{}^nB \\ + {}^{m-n}A\,.\,{}^nB_1 \end{matrix}\right| x + \ldots + \left.\begin{matrix} {}^{m-n}A_r\,.\,{}^nB \\ + {}^{m-n}A_{r-1}\,.\,{}^nB_1 \\ + {}^{m-n}A_{r-2}\,.\,{}^nB_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ + {}^{m-n}A\,.\,{}^nB_r \end{matrix}\right| x^r + \ldots\ldots \text{ daher §. 1. (II)}$$

$$\left(\frac{P_{m-n}\beta^n}{\alpha^{n+1}}\right) K_r = {}^{m-n}A_r\,.\,{}^nB + {}^{m-n}A_{r-1}\,.\,{}^nB_1 + {}^{m-n}A_{r-2}\,.\,{}^nB_2 + \ldots\ldots\ldots + {}^{m-n}A\,.\,{}^nB_r$$

und man findet hieraus, wenn 0, 1, 2, 3, ... statt n gesetzt wird

$$\left(\frac{P_m}{\alpha}\right) K_r = {}^mA_r\,.\,B + {}^mA_{r-1}\,.\,B_1 + {}^mA_{r-2}\,.\,B_2 + \ldots\ldots\ldots + {}^mA\,.\,B_r$$

$$\left(\frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2}\right) K_r = {}^{m-1}A_r\,.\,{}^1B + {}^{m-1}A_{r-1}\,.\,{}^1B_1 + {}^{m-1}A_{r-2}\,.\,{}^1B_2 + \ldots\ldots\ldots + {}^{m-1}A\,.\,{}^1B_r$$

. . . .

$$\left(\frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}\right) K_r = A_r\,.\,{}^mB + A_{r-1}\,.\,{}^mB_1 + A_{r-2}\,.\,{}^mB_2 + \ldots\ldots\ldots + A\,.\,{}^mB_r \text{ oder nach [III]}$$

$$(Q^1K_m)\,K_r = \begin{cases} +\,({}^mA_r\,.\,B + {}^mA_{r-1}\,.\,B_1 + {}^mA_{r-2}\,.\,B_2 + \ldots + {}^mA\,.\,B_r) \\ -\,({}^{m-1}A_r\,.\,{}^1B + {}^{m-1}A_{r-1}\,.\,{}^1B_1 + {}^{m-1}A_{r-2}\,.\,{}^1B_2 + \ldots + {}^{m-1}A\,.\,{}^1B_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm\,(A_r\,.\,{}^mB + A_{r-1}\,.\,{}^mB_1 + A_{r-2}\,.\,{}^mB_2 + \ldots + A\,.\,{}^mB_r) \end{cases}$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Nach [II] ist $Q^1K_m = Q_m$. Aber auch

$$Q_m = {}^mG + {}^mG_1\,x + {}^mG_2\,x^2 + {}^mG_3\,x^3 + \ldots\ldots + {}^mG_r\,x^r + \ldots\ldots$$

daher wird auch $Q_mK_r = {}^mG_r$ oder

$$(Q^1K_m)\;K_r = Q_mK_r = {}^mG_r\,.$$

Ferner wird mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes nach [IV]

$$\text{(II)}\quad {}^mB_r = \pm\Big[(r+m)_m\,a^rb^m - (r+m-1)_m\,m\,a^{r-1}\,b^{m-1}\,c + (r+m-2)_m\,m_2\,a^{r-2}\,b^{m-2}\,c^2 - \ldots\ldots \pm m_r\,b^{m-r}\,c^r\Big]$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach wird:

$$B_r = \pm a^r$$
$${}^1B_r = \pm \left[(r+1)\ a^r b - r a^{r-1} c\right]$$
$${}^2B_r = \pm \left[(r+2)_2\, a^r b^2 - 2\,(r+1)_2\, a^{r-1}\, bc + r_2\, a^{r-2}\, c^2\right]$$
$${}^3B_r = \pm \left[(r+3)_3\, a^r b^3 - 3\,(r+2)_3\, a^{r-1}\, b^2 c + 3\,(r+1)_3\, a^{r-2}\, bc^2 - r_3\, a^{r-3}\, c^3\right]$$

u. s. w. Ferner

$${}^mB = b^m$$
$${}^mB_1 = m\ b^{m-1}\, c - (m+1)\, ab^m$$
$${}^mB_2 = m_2\, b^{m-2}\, c^2 - (m+1)\, m\ ab^{m-1}\, c + (m+2)_2\, a^2\, b^m$$
$${}^mB_3 = m_3\, b^{m-3}\, c^3 - (m+1)\, m_2\, ab^{m-2}\, c^2 + (m+2)_2\, m a^2\, b^{m-1}\, c - (m+3)_3\, a^3\, b^m$$

u. s. w.

Es ist daher $(Q^1 K_m)\ K_r$ oder

$$\text{(III)}\ {}^mG_r = \begin{cases} + \ {}^mA_r - {}^mA_{r-1}\ a + {}^mA_{r-2}\ a^2 - \ldots + {}^mA\,(-1)^r\ a^r \\ - ({}^{m-1}A_r\, b + {}^{m-1}A_{r-1}\,.\,{}^1B_1 + {}^{m-1}A_{r-2}\,.\,{}^1B_2 + \ldots + {}^{m-1}A\ .\ {}^1B^r) \\ + ({}^{m-2}A_r\, b^2 + {}^{m-2}A_{r-1}\,.\,{}^2B_1 + {}^{m-2}A_{r-2}\,.\,{}^2B_2 + \ldots + {}^{m-2}A\ .\ {}^2B_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm (A_r\, b^m + A_{r-1}\,.\,{}^mB_1 + A_{r-2}\,.\,{}^mB_2 + \ldots + A\ .\ {}^mB_r) \end{cases}$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Hiernach ist man im Stande, weil ${}^mA_r$ gegeben ist und ${}^mB_r$ nach (II) aus a, b, c gefunden werden kann, die vollständige Entwickelung von Q^1 zu finden.

§. 3.

1. **Zusatz.** Sucht man die Entwickelung von

$$\frac{P^1}{1 + ax + by} = Q^1 = Q + Q_1 y + Q_2 y^2 + Q_3 y^3 + \ldots + Q_m y^m + \ldots$$

wenn P^1 und Q^1 die bisherige Bedeutung behalten, so wird hier $c = 0$ also ${}^mB_r = \pm\ (r+m)_m\ a^r b^m$, daher $B_r = \pm\ a^r$; ${}^1B_r = \pm\ (r+1)\ a^r b$; ${}^2B_r = \pm\ (r+2)_2\ a^r b^2$; ...... und man findet

$$
{}^{m}G_{r} = \left\{\begin{array}{l}
+ \quad {}^{m}A_{r} - {}^{m}A_{r-1}\,a + {}^{m}A_{r-2}\,a^{2} - \ldots + {}^{m}A\,(-a)^{r} \\
- b\left[{}^{m-1}A_{r} - 2\,.\,{}^{m-1}A_{r-1}\,a + 3_{2}\,.\,{}^{m-1}A_{r-2}\,a^{2} - \ldots + (r+1)\,.\,{}^{m-1}A\,(-a)^{r}\right] \\
+ b^{2}\left[{}^{m-2}A_{r} - 3\,.\,{}^{m-2}A_{r-1}\,a + 4_{2}\,.\,{}^{m-2}A_{r-2}\,a^{2} - \ldots + (r+2)_{2}\,{}^{m-2}A\,(-a)^{r}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm b^{m}\left[A_{r} - (m+1)\,A_{r-1}\,a + (m+2)_{2}\,A_{r-2}\,a^{2} - \ldots + (r+m)_{m}\,A\,(-a)^{r}\right]
\end{array}\right\}
$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Für $m = 3$ und $r = 2$ wird hiernach

$$
{}^{3}G_{2} = \left\{\begin{array}{l}
+ \quad {}^{3}A_{2} - {}^{3}A_{1}\,a + {}^{3}A\,a^{2} \\
- b\left[{}^{2}A_{2} - 2\,.\,{}^{2}A_{1}\,a + 3_{2}\,.\,{}^{2}A\,a^{2}\right] \\
+ b^{2}\left[{}^{1}A_{2} - 3\,.\,{}^{1}A_{1}\,a + 4_{2}\,.\,{}^{1}A\,a^{2}\right] \\
- b^{3}\left[A_{2} - 4\,.\,A_{1}\,a + 5_{2}\,.\,A\,a^{2}\right]
\end{array}\right\}
$$

§. 4.

2. **Zusatz.** Für die Entwickelung von

$$\frac{P^{1}}{1 + ax + cxy} = Q^{1} = Q + Q_{1}y + Q_{2}y^{2} + Q_{3}y^{3} + \ldots\ldots + Q_{m}y^{m} + \ldots\ldots$$

wird hier $b = 0$ also $B_{r} = \pm a^{r}$; ${}^{1}B_{r} = \mp r a^{r-1} c$; ${}^{2}B_{r} = \pm r_{2} a^{r-2} c^{2}$; ${}^{3}B_{r} = \mp r_{3} a^{r-3} c^{3}$ und überhaupt ${}^{m}B_{r} = \pm (-1)^{m} r_{m} a^{r-m} c^{m}$, wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach findet man

$B = 1$; $B_{1} = -a$; $B_{2} = a^{2}$; $B_{3} = -a^{3}$; $B_{4} = a^{4}$; ....
${}^{1}B = 0$; ${}^{1}B_{1} = c$; ${}^{1}B_{2} = -2ac$; ${}^{1}B_{3} = 3a^{2}c$; ${}^{1}B_{4} = -4\,a^{3}c$; ....
${}^{2}B = 0$; ${}^{2}B_{1} = 0$; ${}^{2}B_{2} = c^{2}$; ${}^{2}B_{3} = -3_{2}ac^{2}$; ${}^{2}B_{4} = 4_{2}a^{2}c^{2}$; ....
${}^{3}B = 0$; ${}^{3}B_{1} = 0$; ${}^{3}B_{2} = 0$; ${}^{3}B_{3} = c^{3}$; ${}^{3}B_{4} = -4_{3}a\,c^{3}$; ....
${}^{4}B = {}^{4}B_{1} = {}^{4}B_{2} = {}^{4}B_{3} = 0$; ${}^{4}B_{4} = c^{4}$; ${}^{4}B_{5} = -5_{4}\,ac^{4}$; .... folglich

$$
{}^{m}G_{r} = \left\{\begin{array}{l}
+ \quad {}^{m}A_{r} - {}^{m}A_{r-1}\,a + {}^{m}A_{r-2}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,{}^{m}A\,a^{r} \\
- c\left[{}^{m-1}A_{r-1} - 2\,.\,{}^{m-1}A_{r-2}\,a + 3\,.\,{}^{m-1}A_{r-3}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,r\,.\,{}^{m-1}A\,a^{r-1}\right] \\
+ c^{2}\left[{}^{m-2}A_{r-2} - 3_{2}\,.\,{}^{m-2}A_{r-3}\,a + 4_{2}\,.\,{}^{m-2}A_{r-4}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,r_{2}\,.\,{}^{m-2}A\,a^{r-2}\right] \\
- c^{3}\left[{}^{m-3}A_{r-3} - 4_{3}\,.\,{}^{m-3}A_{r-4}\,a + 5_{3}\,.\,{}^{m-3}A_{r-5}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,r_{3}\,.\,{}^{m-3}A\,a^{r-3}\right] \\
+ c^{4}\left[{}^{m-4}A_{r-4} - 5_{4}\,.\,{}^{m-4}A_{r-5}\,a + 6_{4}\,.\,{}^{m-4}A_{r-6}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,r_{4}\,.\,{}^{m-4}A\,a^{r-4}\right] \\
- c^{5}\left[{}^{m-5}A_{r-5} - 6_{5}\,.\,{}^{m-5}A_{r-6}\,a + 7_{5}\,.\,{}^{m-5}A_{r-7}\,a^{2} - \ldots + (-1)^{r}\,r_{5}\,.\,{}^{m-5}A\,a^{r-5}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}
$$

Für $m = 4$ und $r = 3$ wird

$$ {}^4G_3 = \left\{ \begin{array}{l} + \; {}^4A_3 - {}^4A_2\, a + {}^4A_1\, a^2 - {}^4A\, a^3 \\ - c \; ({}^3A_2 - 2 \,.\, {}^3A_1\, a + {}^3A \; a^2) \\ + c^2 \, ({}^2A_1 - 3_2 \,.\, {}^2A \; a) \\ - c^3 \,.\, {}^1A \end{array} \right\} $$

§. 5.

3. Zusatz. Sucht man die Entwickelung von

$$ \frac{P^1}{1 + by + cxy} = Q^1 = Q + Q_1 y + Q_2 y^2 + Q_3 y^3 + \ldots\ldots + Q_m y^m + \ldots\ldots $$

so wird hier $a = 0$ also, ${}^mB_r = m_r\, b^{m-r}\, c^r$, daher ${}^mB_r = 0$ für $r > m$, wegen des Factors m_r. Hiernach erhält man

$$ {}^mG_r = \left\{ \begin{array}{l} + \; {}^mA_r \\ - ({}^{m-1}A_r\, b + {}^{m-1}A_{r-1}\, c) \\ + ({}^{m-2}A_r\, b^2 + 2 \,.\, {}^{m-2}A_{r-1}\, b \; c + {}^{m-2}A_{r-2}\, c^2) \\ - ({}^{m-3}A_r\, b^3 + 3 \,.\, {}^{m-3}A_{r-1}\, b^2 \; c + 3_2 \,.\, {}^{m-3}A_{r-2}\, b \; c^2 + {}^{m-3}A_{r-3}\, c^3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \, (A_r\, b^m + m \,.\, A_{r-1}\, b^{m-1}\, c + m_2 \,.\, A_{r-2}\, b^{m-2}\, c^2 + \ldots + m_r\, A\, b^{m-r}\, c^r) \end{array} \right\} $$

Für $m = 4$ und $r = 7$ wird

$$ {}^4G_7 = \left\{ \begin{array}{l} + \; {}^4A_7 \\ - \; {}^3A_7\, b - {}^3A_6\, c \\ + \; {}^2A_7\, b^2 + 2 \,.\, {}^2A_6\, b\; c + {}^2A_5\, c^2 \\ - \; {}^1A_7\, b^3 - 3 \,.\, {}^1A_6\, b^2 c - 3_2 \,.\, {}^1A_5\, b\; c^2 - {}^1A_4\, c^3 \\ + \; A_7\, b^4 + 4 \,.\, A_6\, b^3 c + 4_2 \,.\, A_5\, b^2 c^2 + 4_3 \,.\, A_4\, b c^3 + A_3\, c^4 \end{array} \right\} $$

§. 6.

4. Zusatz. Für diejenigen Fälle in welchen der Nenner der gegebenen gebrochenen Funkzion nur aus einer zweitheiligen Gröfse besteht, erhält man für Q^1 sehr einfache Ausdrücke.

Wäre die gegebene Funkzion $\frac{P^1}{1+ax}$ zu entwickeln, so setze man $b = 0$ in §. 3 oder $c = 0$ in §. 4. Dies giebt

$$ {}^mG_r = {}^mA_r - {}^mA_{r-1}\, a + {}^mA_{r-2}\, a^2 - {}^mA_{r-3}\, a^3 + \ldots\ldots + {}^mA\, (-a)^r $$

daher findet man nach §. 2.

$$Q = A + (A_1 - Aa)x + (A_2 - A_1 a + Aa^2)x^2 + (A_3 - A_2 a + A_1 a^2 - Aa^3)x^3 + \dots$$
$$Q_1 = {}^1A + ({}^1A_1 - {}^1Aa)x + ({}^1A_2 - {}^1A_1 a + {}^1Aa^2)x^2 + ({}^1A_3 - {}^1A_2 a + {}^1A_1 a^2 - {}^1Aa^3)x^3 + \dots$$
$$Q_2 = {}^2A + ({}^2A_1 - {}^2Aa)x + ({}^2A_2 - {}^2A_1 a + {}^2Aa)x^2 + ({}^2A_3 - {}^2A_2 a + {}^2A_1 a^2 - {}^2Aa^3)x^3 + \dots$$

u. s. w. Hieraus folgt

$$\text{(I)}\quad \frac{P^1}{1+ax} = \left\{\begin{array}{l} + \; A + (A_1 - Aa)x + (A_2 - A_1 a + Aa^2)x^2 \\ \qquad + (A_3 - A_2 a + A_1 a^2 - Aa^3)x^3 + \dots\dots\dots \\ + \left[{}^1A + ({}^1A_1 - {}^1Aa)x + ({}^1A_2 - {}^1A_1 a + {}^1Aa^2)x^2\right. \\ \qquad \left. + ({}^1A_3 - {}^1A_2 a + {}^1A_1 a^2 - {}^1Aa^3)x^3 + \dots\dots\right] y \\ + \left[{}^2A + ({}^2A_1 - {}^2Aa)x + ({}^2A_2 - {}^2A_1 a + {}^2Aa^2)x^2\right. \\ \qquad \left. + ({}^2A_3 - {}^2A_2 a + {}^2A_1 a^2 - {}^2Aa^3)x^3 + \dots\dots\right] y^2 \\ + \left[{}^3A + ({}^3A_1 - {}^3Aa)x + ({}^3A_2 - {}^3A_1 a + {}^3Aa^2)x^2\right. \\ \qquad \left. + ({}^3A_3 - {}^3A_2 a + {}^3A_1 a^2 - {}^3Aa^3)x^3 + \dots\dots\right] y^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

Zur Entwickelung der Funkzion $\frac{P^1}{1+by}$ setze man $a = 0$ in §. 3 oder $c = 0$ in §. 5, so wird

$${}^mG_r = {}^mA_r - {}^{m-1}A_r b + {}^{m-2}A_r b^2 - {}^{m-3}A_r b^3 + \dots\dots \pm A_r b^m$$

Hiernach die Werthe Q, Q_1, $Q_2 \dots\dots$ bestimmt, so erhält man

$$\text{(II)}\quad \frac{P^1}{1+by} = \left\{\begin{array}{l} + \; A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 \\ \qquad\qquad + A_7 x^7 + \dots\dots\dots\dots \\ + \left[{}^1A - Ab + ({}^1A_1 - A_1 b)x + ({}^1A_2 - A_2 b)x^2\right. \\ \qquad \left. + ({}^1A_3 - A_3 b)x^3 + ({}^1A_4 - A_4 b)x^4 + \dots\dots\right] y \\ + \left[{}^2A - {}^1Ab + Ab^2 + ({}^2A_1 - {}^1A_1 b + A_1 b^2)x\right. \\ \qquad \left. + ({}^2A_2 - {}^1A_2 b + A_2 b^2)x^2 + \dots\dots\dots\dots\right] y^2 \\ + \left[{}^3A - {}^2Ab + {}^1Ab^2 - Ab^3 + ({}^3A_1 - {}^2A_1 b + {}^1A_1 b^2\right. \\ \qquad \left. - A_1 b^3)x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\right] y^3 \\ + \left[{}^4A - {}^3Ab + {}^2Ab^2 - {}^1Ab^3 + Ab^4 + ({}^4A_1 - {}^3A_1 b\right. \\ \qquad \left. + {}^2A_1 b^2 - {}^1A_1 b^3 + A_1 b^4)x + \dots\dots\dots\dots\right] y^4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

Die Funkzion $\frac{P^1}{1+cxy}$ zu entwickeln, setze man $a = 0$ in §. 4 oder $b = 0$ in §. 5, so erhält man

$${}^{m}G_{r} = {}^{m}A_{r} - {}^{m-1}A_{r-1}\, c + {}^{m-2}A_{r-2}\, c^{2} - {}^{m-3}A_{r-3}\, c^{3} + {}^{m-4}A_{r-4}\, c^{4} - \ldots\ldots$$

und wenn hiernach die Werthe Q, Q_1, Q_2, ... bestimmt werden, so findet man

$$\frac{P^1}{1+cxy} = \left\{\begin{array}{l}
+\ A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 + A_7 x^7 + \ldots\ldots \\
+ \big[{}^{1}A + ({}^{1}A_1 - A c)\, x + ({}^{1}A_2 - A_1 c)\, x^2 + ({}^{1}A_3 - A_2 c)\, x^3 \\
\qquad\qquad\qquad + ({}^{1}A_4 - A_3 c)\, x^4 + \ldots\ldots \big]\, y \\
+ \big[{}^{2}A + ({}^{2}A_1 - {}^{1}A c)\, x + ({}^{2}A_2 - {}^{1}A_1 c + A c^2)\, x^2 + ({}^{2}A_3 - {}^{1}A_2 c \\
\qquad\qquad\qquad + A_1 c^2)\, x^3 + \ldots\ldots \big]\, y^2 \\
+ \big[{}^{3}A + ({}^{3}A_1 - {}^{2}A c)\, x + ({}^{3}A_2 - {}^{2}A_1 c + {}^{1}A c^2)\, x^2 + ({}^{3}A_3 - {}^{2}A_2 c + {}^{1}A_1 c^2 \\
\qquad\qquad\qquad - A c^3)\, x^3 + \ldots\ldots \big]\, y^3 \\
+ \big[{}^{4}A + ({}^{4}A_1 - {}^{3}A c)\, x + ({}^{4}A_2 - {}^{3}A_1 c + {}^{2}A c)\, x^2 + ({}^{4}A_3 - {}^{3}A_2 c + {}^{2}A_1 c^2 \\
\qquad\qquad\qquad - {}^{1}A c^3)\, x^3 + \ldots\ldots \big]\, y^4 \\
+ \big[{}^{5}A + ({}^{5}A_1 - {}^{4}A c)\, x + ({}^{5}A_2 - {}^{4}A_1 c + {}^{3}A c)\, x^2 + ({}^{5}A_3 - {}^{4}A_2 c + {}^{3}A_1 c^2 \\
\qquad\qquad\qquad - {}^{2}A c^3)\, x^3 + \ldots\ldots \big]\, y^5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

§. 7.

Besteht der Zähler $P^1 = P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \ldots\ldots$ aus einer bestimmten Anzahl Glieder, so läſst sich leicht übersehen, daſs alsdann die gefundenen Ausdrücke noch sehr vereinfacht werden können. Sucht man z. B. die Entwickelung von

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + {}^{1}Ay + {}^{1}A_1 xy + {}^{2}Ay^2}{1 + cxy},$$

so sind hier auſser A; A_1; A_2; ${}^{1}A$; ${}^{1}A_1$; ${}^{2}A$; die übrigen Koeffizienten $= 0$, daher erhält man

$$\frac{A+A_1 x+A_2 x^2+{}^1Ay+{}^1A_1 xy+{}^2Ay^2}{1+cxy}=\left\{\begin{array}{l}
+A+A_1 x+A_2 x^2 \\
-\left[-{}^1A-({}^1A_1-Ac)\,x+A_1\,cx^2+A_2\,cx^3\right]y \\
+\left[{}^2A-{}^1Acx-({}^1A_1-Ac)\,cx^2+A_1\,c^2x^3\right. \\
\qquad\qquad\qquad\left.+A^2\,c^2\,x^4\right]y^2 \\
-\left[{}^2A-{}^1Acx-({}^1A_1-Ac)\,cx^2+A_1\,c^2x^3\right. \\
\qquad\qquad\qquad\left.+A_2\,c^2\,x^4\right]cxy^3 \\
+\left[{}^2A-{}^1Acx-({}^1A_1-Ac)\,cx^2+A_1\,c^2x^3\right. \\
\qquad\qquad\qquad\left.+A_2\,c^2\,x^4\right]c^2\,x^2\,y^4 \\
-\left[{}^2A-{}^1Acx-({}^1A_1-Ac)\,cx^2+A_1\,c^2x^3\right. \\
\qquad\qquad\qquad\left.+A_2\,c^2\,x^4\right]c^3\,x^3\,y^5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

§. 8.

Den Zusammenhang der eingeführten Koeffizienten zu übersehen, dienen folgende Auseinandersetzungen. Es war

$$P^1 = (1+ax+by+cxy).\ Q^1$$

oder aus §. 2 die entsprechenden Werthe für P^1 und Q^1 gesetzt und nach den Potenzen von y geordnet, giebt

$$P+P_1 y+P_2 y^2+P_3 y^3+\ldots\ldots+P_m y^m\ldots\ldots=$$

$$\left\{\begin{array}{rr|r|r|l}
+\quad Q & +\quad Q_1 & y+\quad Q_2 & y^2\ldots\ldots+\quad Q_m & y^m+\ldots\ldots\ldots \\
+ax\,Q & +ax\,Q_1 & +ax\,Q_2 & +ax\,Q_m & \\
 & +\quad b\,Q & +\quad b\,Q_1 & +\quad b\,Q_{m-1} & \\
 & +cx\,Q & +cx\,Q_1 & +cx\,Q_{m-1} &
\end{array}\right\}$$

daher wird nach der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten $P_m = (1+ax)\ Q_m + (b+cx)\ Q_{m-1}$, oder wenn man für P_m, Q_n und Q_{m-1} die entsprechenden Werthe nach §. 2 setzt:

$${}^mA+{}^mA_1\,x+{}^mA_2\,x^2+{}^mA_3\,x^3+\ldots\ldots+{}^mA_r\,x^r+\ldots\ldots=$$

$$\left\{\begin{array}{rr|r|r|l}
+\quad {}^mG & +\quad {}^mG_1 & x+\quad {}^mG_2 & x^2+\ldots\ldots+\quad {}^mG_r & x^r+\ldots\ldots\ldots \\
 & +a.\ {}^mG & +a.\ {}^mG_1 & +a.\ {}^mG_{r-1} & \\
+b.\ {}^{m-1}G & +b.\ {}^{m-1}G_1 & +b.\ {}^{m-1}G_2 & +b.\ {}^{m-1}G_r & \\
 & +c.\ {}^{m-1}G & +c.\ {}^{m-1}G_1 & +c.\ {}^{m-1}G_{r-1} &
\end{array}\right\}$$

daher nach der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten

(I) $^{m}A_{r} = {}^{m}G_{r} + a \,.\, {}^{m}G_{r-1} + b \,.\, {}^{m-1}G_{r} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1}$

Nach einander 0, 1, 2, 3, ... statt r und m gesetzt, so wird wegen $^{m}A_{-r} = 0$ und $^{-m}A_{r} = 0$

$$\begin{aligned}
^{m}A &= {}^{m}G + b \,.\, {}^{m-1}G \\
^{m}A_1 &= {}^{m}G_1 + a \,.\, {}^{m}G + b \,.\, {}^{m-1}G_1 + c \,.\, {}^{m-1}G \\
^{m}A_2 &= {}^{m}G_2 + a \,.\, {}^{m}G_1 + b \,.\, {}^{m-1}G_2 + c \,.\, {}^{m-1}G_1 \\
^{m}A_3 &= {}^{m}G_3 + a \,.\, {}^{m}G_2 + b \,.\, {}^{m-1}G_3 + c \,.\, {}^{m-1}G_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_r &= G_r + a \,.\, G_{r-1} \\
^{1}A_r &= {}^{1}G_r + a \,.\, {}^{1}G_{r-1} + b \,.\, G_r + c \,.\, G_{r-1} \\
^{2}A_r &= {}^{2}G_r + a \,.\, {}^{2}G_{r-1} + b \,.\, {}^{1}G_r + c \,.\, {}^{1}G_{r-1} \\
^{3}A_r &= {}^{3}G_r + a \,.\, {}^{3}G_{r-1} + b \,.\, {}^{2}G_r + c \,.\, {}^{2}G_{r-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man ferner

$^{0}A = {}^{0}G$	$A_0 = G_0$
$^{1}A = {}^{1}G + b \,.\, G$	$A_1 = G_1 + aG$
$^{2}A = {}^{2}G + b \,.\, {}^{1}G$	$A_2 = G_2 + aG_1$
$^{3}A = {}^{3}G + b \,.\, {}^{2}G$	$A_3 = G_3 + aG_2$
. . . .	. . . .

§. 9.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$$^{m}G_{r} + a \,.\, {}^{m}G_{r-1} + b \,.\, {}^{m-1}G_{r} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = f(r, m)$$

zu integriren oder den Werth von $^{m}G_{r}$ zu finden, wenn $f(r, m)$ irgend eine Funkzion von r und m ist.

Auflösung. Man vergleiche den gegebenen Ausdruck mit (I) §. 8 so wird $^{m}A_{r} = f(r, m)$, und man kann hiernach $^{m}A_{r}$ für alle Werthe von r und m finden, daher erhält man $^{m}G_{r}$ nach (III) §. 2 wenn zuvor der Werth von $^{m}B_{r}$ nach (II) §. 2 bestimmt ist.

Beispiel. Die zum integriren gegebene Differenzgleichung sei

$$^{m}G_{r} + {}^{m}G_{r-1} + {}^{m-1}G_{r} + {}^{m-1}G_{r-1} = mr$$

so wird hier $a = b = c = 1$ und ${}^m A_r = mr$, also §. 2 (II)

$${}^m B_r = \pm \left[(r+m)_m - (r+m-1)_m \, m + (r+m-2)_m \, m_2 - \ldots\ldots \pm m_r \right]$$

oder weil nach den Eigenschaften der Binomialkoeffizienten dieser Ausdruck $= \pm 1$ wird, so erhält man

${}^m B_r = \pm 1$, wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach findet man

${}^m B_0 = 1$; ${}^m B_1 = -1$; ${}^m B_2 = 1$; ${}^m B_3 = -1$; ..... daher §. 2 (III) wegen $A_r = 0$

$${}^m G_r = \begin{cases} +\, m & [r - (r-1) + (r-2) - \ldots\ldots \mp 1 \pm 0] \\ -\,(m-1) & [r - (r-1) + (r-2) - \ldots\ldots \mp 1 \pm 0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mp\, 1 & [r - (r-1) + (r-2) - \ldots\ldots \mp 1 \pm 0] \end{cases}$$

oder weil $\left[r - (r-1) + \ldots\ldots \mp 1 \right] = (-1)^r \left[-1 + 2 - 3 + \ldots\ldots \pm r \right]$

$= \frac{2r + 1 - (-1)^r}{4}$ ist, so erhält man auch

$${}^m G_r = \left[m - (m-1) + (m-2) - \ldots\ldots \mp 1 \right] \frac{2r + 1 - (-1)^r}{4} \quad \text{folglich}$$

$${}^m G_r = \frac{2m + 1 - (-1)^m}{4} \cdot \frac{2r + 1 - (-1)^r}{4}$$

Für $m = r = 1$ wird ${}^1G_1 + {}^1G + G_1 + G = 1$.
Aber ${}^1G_1 = 1$; ${}^1G = 0$; $G_1 = 0$; $G = 0$;
daher $1 + 0 + 0 + 0 = 1$.

Für $m = 3$ und $r = 2$ wird ${}^3G_2 + {}^3G_1 + {}^2G_2 + {}^2G_1 = 3 \,.\, 2$.
Aber ${}^3G_2 = 2$; ${}^3G_1 = 2$; ${}^2G_2 = 1$; ${}^2G_1 = 1$;
daher $2 + 2 + 1 + 1 = 6$.

Für $m = 7$ und $r = 6$ wird ${}^7G_6 + {}^7G_5 + {}^6G_6 + {}^6G_5 = 7 \,.\, 6$.
Aber ${}^7G_6 = 12$; ${}^7G_5 = 12$; ${}^6G_6 = 9$; ${}^6G_5 = 9$;
daher $12 + 12 + 9 + 9 = 42$.

Sucht man die Funkzion aus welcher die gegebene Differenzgleichung entstanden ist und bemerkt daſs hier $a = b = c = 1$ ist, so wird

$\frac{P'}{1 + x + y + xy}$ die gesuchte erzeugende Funkzion, und man findet nach §. 2 wegen ${}^{m}A = 0$ und $A_r = 0$

$$P' = \left\{\begin{matrix} 1 \,.\, 1\, xy + 1 \,.\, 2\, x^2 y + 1 \,.\, 3\, x^3 y + 1 \,.\, 4\, x^4 y + 1 \,.\, 5 \,.\, x^5 y + \ldots\ldots \\ 2 \,.\, 1\, xy^2 + 2 \,.\, 2\, x^2 y^2 + 2 \,.\, 3\, x^3 y^2 + 2 \,.\, 4\, x^4 y^2 + 2 \,.\, 5\; x^5 y^2 + \ldots\ldots \\ 3 \,.\, 1\, xy^3 + 3 \,.\, 2\, x^2 y^3 + 3 \,.\, 3\, x^3 y^3 + 3 \,.\, 4\, x^4 y^4 + 3 \,.\, 5\; x^5 y^4 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m \,.\, 1\, xy^m + m \,.\, 2\, x^2 y^m + m \,.\, 3\, x^3 y^m + m \,.\, 4\, x^4 y^m + m \,.\, 5 \,.\, x^5 y^m + \ldots\ldots \end{matrix}\right\}$$

Für verschiedene Werthe von ${}^{m}G_r$ erhält man nachstehende Tafel mit doppelten Eingängen

${}^{m}G_r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 .... r
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 ....
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5 ....
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5 ....
3	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10 ....
4	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10 ....
5	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15 ....
6	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15 ....
7	0	4	4	8	8	12	12	16	16	20 ....
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
m										

§. 10.

Zusatz. Es lassen sich nun noch die Fälle entwickeln, wenn von den Koeffizienten a, b, c einer oder zwei $= 0$ werden, und es wird hinreichend seyn, den Fall $a = 0$, auseinander zu setzen. Es sei daher die Gleichung

$${}^{m}G_r + b \,.\, {}^{m-1}G_r + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = f(m, r)$$

zum integriren gegeben, so erhält man hier,

$${}^{m}A_r = f(m, r) \text{ und wegen } a = 0,\ {}^{m}B_r = m_r\, b^{m-r} c^r, \text{ daher}$$

$$
{}^{m}G_{r} = \left\{\begin{array}{l}
+ f(m, r) \\
- [b\ f(m-1, r) + \quad c f(m-1, r-1)] \\
+ [b^{2} f(m-2, r) + 2b\ c f(m-2, r-1) + \quad c^{2} f(m-2, r-2)] \\
- [b^{3} f(m-3, r) + 3b^{2}\ c f(m-3, r-1) + 3b\ c^{2} f(m-3, r-2) + c^{3} f(m-3, r-3)] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm [b^{m} f(0, r) + m b^{m-1}\ c f(0, r-1) + m_{2}\ b^{m-2}\ c^{2} f(0, r-2) + \ldots\ldots + m_{r}\ b^{m-r}\ c^{r} f(0, 0)]
\end{array}\right\}
$$

Diesen Fall auf die besondere Gleichung

$$ {}^{m}G_{r} + b \,.\, {}^{m-1}G_{r} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = (m+1)\, r $$

angewandt, giebt $f(m, r) = (m+1)\, r$, daher wird hier

$$
{}^{m}G_{r} = \left\{\begin{array}{l}
+ (m+1)\, r \\
- [rb + (r-1)\ c]\ m \\
+ [rb^{2} + 2(r-1)\, b\ c + (r-2)\ c^{2}]\ (m-1) \\
- [rb^{2} + 3(r-1)\, b^{2} c + 3_{2}(r-2)\, b c^{2} + 3_{3}(r-3)\ c^{3}]\ (m-2) \\
+ [rb^{4} + 4(r-1)\, b^{3} c + 4_{2}(r-2)\, b^{2} c^{2} + 4_{3}(r-3)\, b c^{3} + 4_{4}(r-4)\ c^{4}]\ (m-3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm [rb^{m} + m(r-1)\, b^{m-1}\ c + m_{2}(r-2)\, b^{m-2}\ c^{2} \ldots\ldots + m_{r-1}\ 1 \,.\, b^{m-r+1}\ c^{r-1}] \,.\, 1
\end{array}\right\}
$$

Nun ist nach den Eigenschaften der Reihen mit Binomialkoefficienten

$$
\begin{aligned}
rb^{m} + m(r-1)\, b^{m-1}\, c + m_{2}(r-2)\, b^{m-2}\, c^{2} + \ldots\ldots + m_{r-1}\ 1 \,.\, b^{m-r+1}\, c^{r-1} \\
= (rb + rc - mc)\ (b+c)^{m-1}
\end{aligned}
$$

Hierin nach einander 1, 2, 3, 4, ... statt m gesetzt, so erhält man auch

$$
{}^{m}G_{r} = (m+1)\, r - \left\{\begin{array}{l}
+ (rb + rc - c) \,.\, m \\
- (rb + rc - 2c)\ (b+c)\ \ (m-1) \\
+ (rb + rc - 3c)\ (b+c)^{2}\ (m-2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mp (rb + rc - mc)\ (b+c)^{m-1} \,.\, 1.
\end{array}\right\}
$$

Die vorstehende in Klammern befindliche arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, könnte zwar auch summirt werden, weil aber dadurch für die Berechnung keine Abkürzung entsteht, so wird solche unverändert beibehalten werden.

Als Beispiel zur Berechnung sei

$$ {}^{m}G_{r} + 2 \,.\, {}^{m-1}G_{r} + 3 \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = (m+1)\, r $$

gegeben, so wird hier $b = 2$ und $c = 3$, daher

$$^{m}G_r = r\,(m+1) - (5r-3)\,m + (5r-6)\,5\,(m-1) - (5r-9)\,5^2\,(m-2) + (5r-12)\,5^3\,(m-3) - \ldots\ldots$$

Hieraus folgt $^{0}G_r = r$ und $^{m}G_0 = 0$;

$$^{m}G_1 = 1\,(m+1) - 2m - 5\,(m-1) + 100\,(m-2) - 875\,(m-3) + 6250\,(m-4) - \ldots\ldots$$
$$^{m}G_2 = 2\,(m+1) - 7m + 20\,(m-1) - 25\,(m-2) - 250\,(m-3) + 3125\,(m-4) - \ldots\ldots$$
$$^{m}G_3 = 3\,(m+1) - 12m + 45\,(m-1) - 150\,(m-2) + 375\,(m-3) - 0\,(m-4) - \ldots\ldots$$
$$^{m}G_4 = 4\,(m+1) - 17m + 70\,(m-1) - 275\,(m-2) + 1000\,(m-3) - 3125\,(m-4) + \ldots\ldots$$
$$^{m}G_5 = 5\,(m+1) - 22m + 95\,(m-1) - 400\,(m-2) + 1625\,(m-3) - 6250\,(m-4) + \ldots\ldots$$

u. s. w. Man erhält daher nachstehende Tafel.

$^{m}G_r$	0	1	2	3	4	5	6	7..... r
0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7......
1	0	0	− 3	− 6	− 9	− 12	− 15	− 18......
2	0	− 6	+ 12	+ 30	+ 48	+ 66	+ 84	+ 102......
3	0	+ 88	+ 2	− 84	− 170	− 256	− 342	− 428......
4	0	− 693	− 258	+ 177	+ 612	+ 1047	+ 1482	+ 1917......
5	0	+ 4776	+ 2607	+ 438	− 1731	− 3900	− 6069	− 8238......
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m								

Für verschiedene Werthe von m und r erhält man

$$^{5}G_3 + 2\,.\,^{4}G_3 + 3\,.\,^{4}G_2 = 6\,.\,3 \text{ oder}$$
$$+ 438 + 2\,.\,177 - 3\,.\,258 = 18.$$
$$^{5}G_6 + 2\,.\,^{4}G_6 + 3\,.\,^{4}G_5 = 6\,.\,6 \text{ oder}$$
$$- 6069 + 2\,.\,1482 + 3\,.\,1047 = 36.$$

§. 11.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$$^{m}G_r + a\,.\,^{m}G_{r-1} + b\,.\,^{m-1}G_r + c\,.\,^{m-1}G_{r-1} = 0$$

zu integriren, wenn ^{m}G und G_r gegeben sind, oder willkührlich angenommen werden.

Auflösung. Die gegebene Gleichung mit (I) §. 8 verglichen, giebt hier $^{m}A_r = 0$, dagegen wird nach der dortigen Entwickelung:

$$^{m}A = {}^{m}G + b\,.\,^{m-1}G \text{ und } A_r = G_r + a\,.\,G_{r-1}$$

daher nach §. 2

$$ {}^{m}G_r = \begin{cases} + {}^{m}A \,.\, B_r - {}^{m-1}A \,.\, {}^{1}B_r + {}^{m-2}A \,.\, {}^{2}B_r - \ldots\ldots + (-1)^m \,.\, A \,.\, {}^{m}B_r \\ + (-1)^m \left[A_r \,.\, {}^{m}B + A_{r-1} \,.\, {}^{m}B_1 + A_{r-2} \,.\, {}^{m}B_2 + \ldots\ldots + A_1 \,.\, {}^{m}B_{r-1}\right] \end{cases} $$

wo

$$ {}^{m}B_r = (-1)^r \left[(r+m)_m \; a^r b^m - (r+m-1)_m \; m a^{r-1} \; b^{m-1} \; c \right. $$
$$ \left. + (r+m-2)_m \; m_2 \; a^{r-2} \; b^{m-2} \; c^2 - \ldots\ldots \pm m_r \; b^{m-r} \; c^r \right] \text{ ist.} $$

Auch erhält man für den Zähler des erzeugenden Bruchs:

$$ P^1 = \begin{cases} A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots\ldots \\ \quad + {}^{1}A \; y + {}^{2}A \; y^2 + {}^{3}A \; y^3 + {}^{4}A \; y^4 + {}^{5}A \; y^5 + \ldots\ldots \end{cases} $$

Beispiel. Die zum integriren gegebene Differenzgleichung sei

$$ {}^{m}G_r + {}^{m}G_{r-1} + {}^{m-1}G_r + {}^{m-1}G_{r-1} = 0. $$

Ferner sei ${}^{m}G = m$ und $G_r = r^2$ gegeben, so wird

$$ {}^{m}A = {}^{m}G + {}^{m-1}G = m + m - 1 = 2m - 1, $$
$$ A_r = G_r + G_{r-1} = r^2 + (r-1)^2 = 2r\,(r-1) + 1 = 4r_2 + 1 \text{ und} $$
$$ {}^{m}B_r = (-1)^r \left[(r+m)_m - (r+m-1)_m + \ldots\ldots \pm m_r\right] = (-1)^r \text{ daher} $$
$$ {}^{m}B_0 = 1\,;\; {}^{m}B_1 = -1\,;\; {}^{m}B_2 = 1\,;\; {}^{m}B_3 = -1\,;\; \text{u. s. w.} $$

Ferner ist nach §. 8. ${}^{0}A = {}^{0}G$ und $A_0 = G_0$ daher ${}^{0}A = A_0 = 0$, folglich

$$ {}^{m}G_r = \begin{cases} + (-1)^r \left[(2m-1) - (2m-3) + (2m-5) - (2m-7) + \ldots\ldots + 3 \,.\, (-1)^{m-2} \right. \\ \qquad \left. + 1 \,.\, (-1)^{m-1}\right] \\ + (-1)^m \left\{(4r_2+1) - \left[4(r-1)_2+1\right] + \left[4(r-2)_2+1\right] - \ldots\ldots + \left[4 \,.\, 2_2 + 1\right](-1)^{r-2} \right. \\ \qquad \left. + \left[4 \,.\, 1_2 + 1\right](-1)^{r-1}\right\} \end{cases} $$

Durch Summirung dieser Reihen erhält man

$$ m = (2m-1) - (2m-3) + (2m-5) - \ldots\ldots \pm 3 \mp 1 $$

$$ \frac{r^2}{4} - \frac{1-(-1)^r}{8} = r_2 - (r-1)_2 + (r-2)_2 - (r-3)_2 + \ldots\ldots + 2_2\,(-1)^r \text{ und} $$

$$ \frac{1-(-1)^r}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots + 1 \,.\, (-1)^{r-1}, \text{ daher wird auch} $$

$$ {}^{m}G_r = m\,(-1)^r + \left[r^2 - \frac{1-(-1)^r}{2}\right](-1)^m + \frac{1-(-1)^r}{2}\,(-1)^m \text{ oder auch} $$

$$ {}^{m}G_r = m\,(-1)^r + r^2\,(-1)^m $$

Berechnet man hiernach verschiedene Werthe von ${}^{m}G_{r}$, so entsteht folgende Tafel.

${}^{m}G_{r}$	0	1	2	3	4	5	6	7…… r
0	0	+ 1	+ 4	+ 9	+ 16	+ 25	+ 36	+ 49…….
1	1	— 2	— 3	— 10	— 15	— 26	— 35	— 50…….
2	2	— 1	+ 6	+ 7	+ 18	+ 23	+ 38	+ 47…….
3	3	— 4	— 1	— 12	— 13	— 28	— 33	— 52…….
⋮	………							
m								

Für den Zähler des erzeugenden Bruchs erhält man

$$P^{1} = \begin{Bmatrix} + x + 5x^2 + 13x^3 + 25x^4 + 41x^5 + 60x^6 + \ldots\ldots \\ + y + 3y^2 + 5y^3 + 7y^4 + 9y^5 + 11y^6 + \ldots\ldots \end{Bmatrix}$$

§. 12.

Zusatz. Werden nach einander a, b, $c = 0$ gesetzt, so entstehen folgende Ausdrücke.

Für $a = 0$ wird

$$\text{(I)} \quad {}^{m}G_{r} + b\,.\,{}^{m-1}G_{r} + c\,.\,{}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

${}^{m}A = {}^{m}G + b\,.\,{}^{m-1}G$; $A_r = G_r$; ${}^{0}A = {}^{0}G$.

${}^{m}B_{r} = m_r\, b^{m-r} c^r$, also ${}^{m}B = b^m$; ${}^{m}B_1 = m\, b^{m-1} c$; ${}^{m}B_2 = m_2\, b^{m-2} c^2$; ……

${}^{m}B_{m} = c^m$, wogegen ${}^{m}B_{r} = 0$ für $r > m$ wird. Hiernach erhält man

$${}^{m}G_{r} = \begin{Bmatrix} +(-1)^r\left[{}^{m-r}A\,.\,{}^{r}B_r - {}^{m-r-1}A\,.\,{}^{r+1}B_r + {}^{m-r-2}A\,.\,{}^{r+2}B_r - \ldots\ldots \right. \\ \left. + (-1)^{m-r}\,.\,A\,.\,{}^{m}B_r\right] \\ +(-1)^m\left[A_r\,.\,{}^{m}B + A_{r-1}\,.\,{}^{m}B_1 + A_{r-2}\,.\,{}^{m}B_2 - \ldots\ldots + A_1\,.\,{}^{m}B_{r-1}\right] \end{Bmatrix} \text{ oder}$$

$${}^{m}G_{r} = \begin{Bmatrix} +(-1)^r\left[c^r\,.\,{}^{m-r}A - (r+1)\,bc^r\,.\,{}^{m-r-1}A + (r+2)_2\, b^2 c^r\,.\,{}^{m-r-2}A - \ldots\ldots \right. \\ \left. + (-1)^{m-r}\, m_r\, b^{m-r} c^r\,.\,A\right] \\ +(-1)^m\left[b^m\,.\,A_r + m\,b^{m-1}\,c\,.\,A_{r-1} + m_2\, b^{m-2}\, c^2\,.\,A_{r-2} + \ldots\ldots\ldots \right. \\ \left. + m_{r-1}\, b^{m-r+1}\, c^{r-1}\,.\,A_1\right] \end{Bmatrix}$$

Für $b = 0$ wird

$$\text{(II)} \quad {}^{m}G_{r} + a \,.\, {}^{m}G_{r-1} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

${}^{m}A = {}^{m}G$; $A_r = G_r + a \,.\, G_{r-1}$; $B_r = a^r (-1)^r$; ${}^{1}B_r = - r a^{r-1} c (-1)^r$; ${}^{2}B_r = r_2\, a^{r-2} c^2 (-1)^r$; ..... ${}^{r}B_r = c^r$ und ${}^{m}B_r = 0$ für $m > r$ folglich

$${}^{m}G_r = {}^{m}A \,.\, B_r - {}^{m-1}A \,.\, {}^{1}B_r + {}^{m-2}A \,.\, {}^{2}B_r - \ldots\ldots + (-1)^r \,.\, {}^{m-r}A \,.\, {}^{r}B_r \text{ oder}$$

$${}^{m}G_r = (-1)^r \left[a^r \,.\, {}^{m}G + r a^{r-1} c \,.\, {}^{m-1}G + r_2\, a^{r-2} c^2 \,.\, {}^{m-2}G + \ldots\ldots\ldots + c^r \,.\, {}^{m-r}G\right] \text{ oder auch}$$

$${}^{m}G_r = (-a)^r \left[{}^{m}G + r \frac{c}{a} \,.\, {}^{m-1}G + r_2 \frac{c^2}{a^2} \,.\, {}^{m-2}G + r_3 \frac{c^3}{a^3} \,.\, {}^{m-3}G + \ldots\ldots\ldots + \frac{c^r}{a^r} \,.\, {}^{m-r}G\right]$$

Für $c = 0$ wird

$$\text{(III)} \quad {}^{m}G_r + a \,.\, {}^{m}G_{r-1} + b \,.\, {}^{m-1}G_r = 0$$

${}^{m}A = {}^{m}G + b \,.\, {}^{m-1}G$; $A_r = G_r + a \,.\, G_{r-1}$; ${}^{0}A = {}^{0}G$. ${}^{m}B_r = (-1)^r (r+m)_m\, a^r b^m$ folglich

$${}^{m}G_r = \left\{\begin{array}{l} + (-a)^r \left[{}^{m}A - (r+1)\, b \,.\, {}^{m-1}A + (r+2)_2\, b^2 \,.\, {}^{m-2}A - \ldots\ldots\ldots + (-1)^m (r+m)_m\, b^m \,.\, A\right] \\ + (-b)^m \left[A_r - (m+1)\, a\; A_{r-1} + (m+2)_2\, a^2\; A_{r-2} - \ldots\ldots\ldots - (-1)^r (m+r-1)_{r-1}\, a^{r-1} \,.\, A_1\right] \end{array}\right.$$

In (I) $b = 0$ oder in (II) $a = 0$ gesetzt, giebt

$$\text{(IV)} \quad {}^{m}G_r + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

$${}^{m}G_r = (-1)^r \,.\, c^r \,.\, {}^{m-r}G.$$

1. **Beispiel.** Die Gleichung.

$${}^{m}G_r - {}^{m-1}G_r - {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

zu integriren, wenn ${}^{m}G = 1$ und $G_r = 0$ gegeben ist, wird hier nach (I)

$b = -1$; $c = -1$; ${}^{m}A = 0$, $A_r = 0$; ${}^{0}A = 1$ also

${}^{m}G_r = (-1)^r (-1)^{m-r} m_r (-1)^{m-r} (-1)^r$ folglich

${}^{m}G_r = m_r$, wie bei Lagrange §. 10 a. a. O.

Der erzeugende Bruch ist hier $= \frac{1}{1 - y - xy}$.

2. **Beispiel.** Die Gleichung

$$^{m}G_{r} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot {}^{m}G_{r-1} - \frac{1}{n} \, {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

zu integriren wird hier nach (II) $a = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ und $b = -\frac{1}{n}$ also $\frac{c}{a} = \frac{1}{n-1}$ daher

$$^{m}G_{r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r} \left[{}^{m}G + \frac{r}{n-1} \cdot {}^{m-1}G + \frac{r_2}{(n-1)^2} \cdot {}^{m-2}G + \frac{r_3}{(n-1)_3} \cdot {}^{m-3}G + \ldots + \frac{r_r}{(n-1)^r} \cdot {}^{m-r}G \right]$$

wie bei Lagrange §. 64. a. a. O.

§. 13.

Es bleibt nun noch eine scheinbare Schwierigkeit für den besondern Fall zu heben, dafs die partielle Differenzgleichung

$$^{m}G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1}G_{r} + c \cdot {}^{m-1}G_{r-1} = f(m; r)$$

zum integriren gegeben ist, weil diese Gleichung aus den vorhergehenden Entwickelungen nicht abgeleitet werden kann. Wird hiernach die Gleichung $\frac{P^1}{x + by + cxy} = Q^1$ als Grundlage zur Entwickelung angenommen, so kann $P^1 = P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \ldots$ oder $Q^1 = Q + Q_1 y + Q_2 y^2 + Q_3 y^3 + \ldots$ als gegeben vorausgesetzt werden. Es sei daher

$$Q^1 = \begin{cases} G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \ldots\ldots = Q \\ ({}^1G + {}^1G_1 x + {}^1G_2 x^2 + {}^1G_3 x^3 + \ldots\ldots)\, y = Q_1 y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ({}^mG + {}^mG_1 x + {}^mG_2 x^2 + {}^mG_3 x^3 + \ldots\ldots)\, y^m = Q_m y^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so erhält man aus $(x + by + cxy)\; Q^1 = P^1$ oder

$$P^1 = \begin{cases} Ax + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + \ldots\ldots = P \\ ({}^1A + {}^1A_1 x + {}^1A_2 x^2 + {}^1A_3 x^3 + \ldots\ldots)\, y = P_1 y \\ ({}^2A x^{-1} + {}^2A_1 + {}^2A_2 x + {}^2A_3 x^2 + \ldots\ldots)\, y^2 = P_2 y^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ({}^mA x^{1-m} + {}^mA_1 x^{2-m} + {}^mA_2 x^{3-m} + {}^mA_3 x^{4-m} + \ldots\ldots)\, y^m = P_m y^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Man setze $b + cx = \beta$, so wird $Q^1 = \frac{P^1}{x + \beta y}$ oder

$$Q^1 = P^1 \left[\frac{1}{x} - \frac{\beta y}{x^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^3} - \frac{\beta^3 y^3}{x^4} + \cdots\cdots + (-1)^m \frac{\beta^m y^m}{x^{m+1}} + \cdots\cdots\right]$$

daher eben so wie §. 2 der zu y^m gehörige Koeffizient $Q^1 K_m$ oder

$$Q_m = P_m x^{-1} - P_{m-1} \beta x^{-2} + P_{m-2} \beta^2 x^{-3} - \cdots\cdots + (-1)^m P \beta^m x^{-m-1}.$$

Diese Glieder in Reihen aufgelöst und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, so findet man den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$(Q_m)\, K_r = \left(\frac{P_m}{x}\right) K_{m+r} - \left(\frac{P_{m-1}\beta}{x^2}\right) K_{m+r} + \left(\frac{P_{m-2}\beta^2}{x^3}\right) K_{m+r} - \cdots\cdots + (-1)^m \left(\frac{P\beta^m}{x^{m+1}}\right) K_{m+r} \quad [I]$$

Ferner ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, $\frac{(b+cx)^n}{x^{n+1}}$ oder

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = b^n x^{-n-1} + n b^{n-1} c x^{-n} + n_2 b^{n-2} c^2 x^{1-n} + \cdots\cdots + n_r b^{n-r} c^r x^{r-n-1} + \cdots\cdots + n_n c^n x^{-1}$$

oder wenn man $n_r b^{n-r} c^r = {}^nB_r$ setzt

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = {}^nB x^{-n-1} + {}^nB_1 x^{-n} + {}^nB_2 x^{1-n} + \cdots\cdots + {}^nB_r x^{r-n-1} + \cdots\cdots + {}^nB_n x^{-1}$$

Diese Reihe mit

$$P_{m-n} = {}^{m-n}A \,.\, x^{n+1-m} + {}^{m-n}A_1 \,.\, x^{n+2-m} + {}^{m-n}A_2\, x^{n+3-m} + \cdots\cdots$$

multiplizirt und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, giebt den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$\left(\frac{P_{m-n}\beta^n}{x^{n+1}}\right) K_{m+r} = {}^{m-n}A_{m+r} \,.\, {}^nB + {}^{m-n}A_{m+r-1} \,.\, {}^nB_1 + {}^{m-n}A_{m+r-2} \,.\, {}^nB_2 + \cdots + {}^{m-n}A_{m+r-n} \,.\, {}^nB_n$$

und hieraus

$$\left(\frac{P_m}{x}\right) K_{m+r} = {}^mA_{m+r} \,.\, B$$

$$\left(\frac{P_{m-1}\beta}{x^2}\right) K_{m+r} = {}^{m-1}A_{m+r} \,.\, {}^1B + {}^{m-1}A_{m+r-1} \,.\, {}^1B_1$$

. . . .

$$\left(\frac{P\beta^m}{x^{m+1}}\right) K_{m+r} = A_{m+r} \,.\, {}^mB + A_{m+r-1} \,.\, {}^mB_1 + A_{m+r-2} \,.\, {}^mB_2 + \cdots + A_r \,.\, {}^mB_m$$

oder nach [I] und weil $(Q_m)\, K_r = {}^mG_r$ ist

$$\text{(I)}\quad {}^mG_r = \left\{\begin{array}{l} +\ {}^mA_{m+r}\ .\ B \\ -\left[{}^{m-1}A_{m+r}\ .\ {}^1B + {}^{m-1}A_{m+r-1}\ .\ {}^1B_1\right] \\ +\left[{}^{m-2}A_{m+r}\ .\ {}^2B + {}^{m-2}A_{m+r-1}\ .\ {}^2B_1 + {}^{m-2}A_{m+r-2}\ .\ {}^2B_2\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(-1)^m\left[\ {}^1A_{m+r}\ .\ {}^{m-1}B + {}^1A_{m+r-1}\ .\ {}^{m-1}B_1 + \cdots + {}^1A_{r+1}\ .\ {}^{m-1}B_{m-1}\right] \\ +(-1)^m\left[\ A_{m+r}\ .\ {}^mB + A_{m+r-1}\ .\ {}^mB_1 + A_{m+r-2}\ {}^mB_2 + \cdots\cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + A_r\ .\ {}^mB_m\right] \end{array}\right\}$$

Ferner findet man aus $P^1 = (x + by + cxy)\ Q^1$

$$P_m = x\,Q_m + (b + cx)\ Q_{m-1}\ \text{oder}$$

$$P_m = \left\{\begin{array}{l|l|l|l} b\ .\ {}^{m-1}G + b\ .\ {}^{m-1}G_1 & x + b\ .\ {}^{m-1}G_2 & x^2 + \cdots + b\ .\ {}^{m-1}G_r & x^r + \cdots \text{ und weil} \\ \qquad + c\ .\ {}^{m-1}G & + c\ .\ {}^{m-1}G_1 & \qquad + c\ .\ {}^{m-1}G_{r-1} & \\ \qquad + \ {}^mG & + \ {}^mG_1 & \qquad + \ {}^mG_{r-1} & \end{array}\right.$$

$$P_m = {}^mA\,x^{1-m} + {}^mA_1\ x^{2-m} + {}^mA_3\ x^{3-m} + \cdots\cdots + {}^mA_{m-1}\ x^0 + {}^mA_m\ x$$
$$+ {}^mA_{m+1}\ x^2 + \cdots\cdots + {}^mA_{m+r-1}\ x^r + \cdots\cdots$$

so folgt aus der Vergleichung beider Ausdrücke

$$\text{(II)}\quad {}^mA_{m+r-1} = {}^mG_{r-1} + b\ .\ {}^{m-1}G_r + c\ .\ {}^{m-1}G_{r-1}$$

und wenn man in (I) die entsprechenden Werthe $B = 1$; ${}^1B = b$; ${}^1B_1 = c$; ${}^2B = b^2$; ${}^2B_1 = 2bc$; ...... ${}^nB_r = n_r b^{n-r}\, c^r$ setzt, so findet man auch

$$\text{(III)}\quad {}^mG_r = \left\{\begin{array}{l} +\ {}^mA_{m+r} \\ -\left[b\ .\ {}^{m-1}A_{m+r} + c\ .\ {}^{m-1}A_{m+r-1}\right] \\ +\left[b^2\ .\ {}^{m-2}A_{m+r} + 2bc\ .\ {}^{m-2}A_{m+r-1} + c^2\ .\ {}^{m-2}A_{m+r-2}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(-1)^m\left[b^{m-1}\ .\ {}^1A_{m+r} + (m-1)\,b^{m-2}\,c\ .\ {}^1A_{m+r-1} + \cdots + c^{m-1}\ .\ {}^1A_{r+1}\right] \\ +(-1)^m\left[b^m\ .\ A_{m+r} + m\,b^{m-1}\,c\ .\ A_{m+r-1} + m_2\,b^{m-2}\,c^2\ .\ A_{m+r-2} + \cdots\cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + c^m\ .\ A_r\right] \end{array}\right\}$$

§. 14.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$${}^mG_{r-1} + b\ .\ {}^{m-1}G_r + c\ .\ {}^{m-1}G_{r-1} = f(m, r)$$

zu integriren, wenn $f(m, r)$ irgend eine Funkzion von m und r ist.

Auflösung. Man setze ${}^mA_{m+r-1} = f(m, r)$, so wird ${}^mA_{m+r} = f(m, r+1)$; ${}^{m-1}A_{m+r} = f\ (m-1, r+2)$; ${}^{m-2}A_{m+r} = f\ (m-2, r+3)$; .... ${}^1A_{m+r}$

$= f(1, m+r)$; $A_{m+r} = f(0, m+r+1)$. Diese Werthe in (III) §. 13 gesetzt, geben

$$
{}^{m}G_{r} = \left\{ \begin{array}{l}
\quad + \; f(m, r+1) \\
\quad - \left[b\, f(m-1, r+2) + c f(m-1, r+1) \right] \\
\quad + \left[b^2 f(m-2, r+3) + 2bc f(m-2, r+2) + c^2 f(m-2, r+1) \right] \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
- (-1)^m \left[b^{m-1} f(1, m+r) + (m-1)\, b^{m-2}\, c f(1, m+r-1) + \cdots + c^{m-1} f(1, r+1) \right] \\
+ (-1)^m \left[b^m f(0, m+r+1) + m\, b^{m-1}\, c f(0, m+r) + m_2\, b^{m-2}\, c^2 f(0, m+r-1) + \cdots \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \, c^m f(0, r+1) \right]
\end{array} \right\}
$$

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^{m}G_{r-1} + {}^{m-1}G_{r} + {}^{m-1}G_{r-1} = m \,.\, r$ zu integriren, wird hier $b = c = 1$ und $f(m, r) = m \,.\, r$ also $f(0, r) = 0$, daher

$$
{}^{m}G_{r} = m\,(r+1) - (m-1)\,(2r+3) + 4\,(m-2)\,(r+2) - 4\,(m-3)\,(2r+5) + 16\,(m-4)\,(r+3) - 16\,(m-5)\,(2r+7) + \cdots\cdots
$$

und es wird hiernach

$G_r = 0$; ${}^{1}G_r = r+1$; ${}^{2}G_r = -1$; ${}^{3}G_r = 3r+5$; ${}^{4}G_r = -2r-9$; ${}^{5}G_r = 9r+25$; u. s. w.

Für $m = 5$ erhält man

$$
{}^{5}G_{r-1} + {}^{4}G_{r} + {}^{4}G_{r-1} = 5 \,.\, r \text{ oder}
$$
$$
9r + 16 - 2r - 9 - 2r - 7 = 5 \,.\, r
$$

auch entsteht für verschiedene Werthe von m und r nachstehende Tafel

${}^{m}G_{r}$	0	1	2	3	4	5	6	7 .... r
0	0	0	0	0	0	0	0	0 ....
1	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8 ....
2	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1 ....
3	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26 ....
4	− 9	− 11	− 13	− 15	− 17	− 19	− 21	− 23 ....
5	+ 25	+ 34	+ 43	+ 52	+ 61	+ 70	+ 79	+ 88 ....
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m								

§. 15.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$$ {}^{m}G_{r-1} + b \,.\, {}^{m-1}G_{r} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = 0 $$

zu integriren, wenn der Werth für G_r gegeben ist, oder willkührlich angenommen wird.

Auflösung. Es ist nach (II) §. 13. ${}^{m}A_{m+r-1} = {}^{m}G_{r-1} + b \,.\, {}^{m-1}G_{r} + c \,.\, {}^{m-1}G_{r-1}$ und wenn man hierin $m = 0$, dann $r = 0$ setzt, so findet man

$$ A_{r-1} = G_{r-1} \text{ und } {}^{m}A_{m-1} = b \,.\, {}^{m-1}G, $$

daher wenn ${}^{m}A_{m+r-1} = 0$ gesetzt wird, so wird zugleich erfordert, dafs A_{r-1} und ${}^{m}A_{m-1}$ die vorstehende Werthe behalten. Man erhält daher nach (III) §. 13.

$$ {}^{m}G_{r} = (-1)^{m}\left[b^{m} \,.\, A_{m+r} + m b^{m-1} c \,.\, A_{m+r-1} + \cdots\cdots + c^{m} \,.\, A_{r}\right] $$

oder wegen $A_r = G_r$; $A_{m+r} = G_{m+r}$; ....

$$ {}^{m}G_{r} = (-1)^{m}\left[b^{m} \,.\, G_{m+r} + m b^{m-1} c \,.\, G_{m+r-1} + m_{2} b^{m-2} c^{2} \,.\, G_{m+r-2} + \cdots\cdots + c^{m} G_{r}\right] $$

Hieraus findet man

$$ \begin{aligned} G_r &= G_r \\ {}^{1}G_r &= -b \,.\, G_{r+1} - c \,.\, G_r \\ {}^{2}G_r &= b^2 \,.\, G_{r+2} + 2b\, c \,.\, G_{r+1} + c^2 \,.\, G_r \\ {}^{3}G_r &= -b^3 \,.\, G_{r+3} - 3b^2 c \,.\, G_{r+2} - 3bc^2 \,.\, G_{r+1} - c^3 \,.\, G_r \end{aligned} $$

u. s. w.

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^{m}G_{r-1} + 2 \,.\, {}^{m-1}G_{r} + 3 \,.\, {}^{m-1}G_{r-1} = 0$ zu integriren, wenn $G_r = 4r$ gegeben ist, wird hier $G_r = 4r$; ${}^{1}G_r = -4\,(2+5r)$; ${}^{2}G_r = 20\,(4+5r)$; ${}^{3}G_r = -100\,(6+5r)$; u. s. w. also für $m = 3$

$$ {}^{3}G_{r-1} + 2 \,.\, {}^{2}G_{r} + 3 \,.\, {}^{2}G_{r-1} = 0 \text{ oder auch} $$

$$ -100\,(1+5r) + 2 \,.\, 20\,(4+5r) + 3 \,.\, 20\,(5r-1) = 0. $$

§. 16.

Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich noch durch eine ähnliche Behandlung auf partielle Differenzgleichungen anwenden,

deren Index m und r noch in andern als den gegebenen Beziehungen gegen einander stehen. Setzt man den Nenner der erzeugenden Funkzion

$$= (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots\cdots) + (d + ex + gx^2 + hx^3 + \cdots\cdots)\, y$$

so wird eben so wie §. 8

$$P^1 = \left[1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots\cdots + (d + ex + gx^2 + hx^3 + \cdots\cdots)\, y\right]\, Q^1$$

und wenn ${}^{\mu}A_{\varrho}$ den zu x^r gehörigen Koeffizienten der Reihe P_m bezeichnet

$$\begin{aligned}{}^{\mu}A_{\varrho} = {}^{m}G_r + a\,.\,{}^{m}G_{r-1} + b\,.\,{}^{m}G_{r-2} + c\,.\,{}^{m}G_{r-3} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ + d\,.\,{}^{m-1}G_r + e\,.\,{}^{m-1}G_{r-1} + g\,.\,{}^{m-1}G_{r-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

woraus der Zusammenhang zwischen dem Nenner der erzeugenden Funkzion und den Gliedern der Differenzgleichung hervor geht.

Sucht man daher das Integral der Gleichung

$${}^{m}G_r + b\,.\,{}^{m}G_{r-2} + d\,.\,{}^{m-1}G_r + h\,.\,{}^{m-1}G_{r-3} = f\,(m, r)$$

so ist der Nenner der erzeugenden Funkzion $= 1 + bx^2 + (d + hx^3)\, y$.

Eben so wird für ${}^{m}G_{r-1} + d\,.\,{}^{m-1}G_r + g\,.\,{}^{m-1}G_{r-2} = f(m, r)$ der zugehörige Nenner $= x + (d + gx^2)\, y$.

§. 17.

Aufgabe. Die partielle Differenzgleichung

$${}^{m}G_{r-1} + b\,.\,{}^{m-1}G_r + c\,.\,{}^{m-1}G_{r-2} = f\,(m, r)$$

zu integriren, wenn $f\,(m, r)$ irgend eine gegebene Funkzion von m und r bedeutet.

Auflösung. Man setze

$$\frac{P + P_1 y + P_2 y^2 + \cdots\cdots}{x + by + cx^2 y} = Q^1 = Q + Q_1 y + Q_2 y^2 + \cdots\cdots$$

$Q_m = {}^{m}G + {}^{m}G_1\, x + {}^{m}G_2\, x^2 + \cdots\cdots$ so findet man wie §. 13.

$P_m = {}^{m}A\; x^{1-m} + {}^{m}A_1\; x^{2-m} + {}^{m}A_2\; x^{3-m} + {}^{m}A_4\; x^{4-m} + \cdots\cdots$ und wenn man $b + cx^2 = \beta$ setzt

$$Q^1 = P^1\left[\frac{1}{x} - \frac{\beta y}{x^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^3} - \frac{\beta^3 y^3}{x^4} + \cdots\cdots + (-1)^m\,\frac{\beta^m y^m}{x^{m+1}} + \cdots\cdots\right]$$

daher eben so wie §. 2 den zu y^m gehörigen Koeffizienten $Q^1 K_m$ oder

$$Q_m = P_m\, x^{-1} - P_{m-1}\, \beta\, x^{-2} + P_{m-2}\, \beta^2\, x^{-3} - \cdots\cdots + (-1)^m\, P\, \beta^m\, x^{-m-1}.$$

Diese Glieder, in Reihen aufgelöst und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, geben den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$(Q_m)\, K_r = \left(\frac{P^m}{x}\right) K_{m+r} - \left(\frac{P_{m-1}\,\beta}{x^2}\right) K_{m+r} + \left(\frac{P_{m-2}\,\beta^2}{x^3}\right) K_{m+r} - \cdots\cdots + (-1)^m \left(\frac{P\,\beta^m}{x^{m+1}}\right) K_{m+r}. \qquad [I]$$

Bedeutet n eine positive ganze Zahl, so wird $\frac{(b+cx^2)^n}{x^{n+1}}$ oder

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = b^n\, x^{n-1} + n\, b^{n-1}\, c\, x^{1-n} + n_2\, b^{n-2}\, c^2\, x^{3-n} + \cdots\cdots + n_r\, b^{n-r}\, c^r\, x^{2r-1-n} + \cdots\cdots + c^n\, x^{n-1}$$

und wenn man $n_r\, b^{n-r}\, c^r = {}^nB_r$ setzt

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}}\; {}^nB\, x^{-n-1} + {}^nB_1\, x^{1-n} + {}^nB_2\, x^{3-n} + \cdots\cdots + {}^nB_r\, x^{2r-1-n} + \cdots\cdots + {}^nB_n\, x^{n-1}.$$

Diese Reihe mit

$$P_{m-n} = {}^{m-n}A\, x^{n+1-m} + {}^{m-n}A_1\, x^{n+2-m} + \cdots\cdots + {}^{m-n}A_{m+r}\, x^{n+r-m} + \cdots\cdots$$

multiplizirt und nach den Potenzen von x geordnet, giebt den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$\left(\frac{P_{m-n}\,\beta^n}{x^{n+1}}\right) K_{m+r} = {}^{m-n}A_{m+r}\,.\,{}^nB + {}^{m-n}A_{m+r-2}\,.\,{}^nB_1 + {}^{m-n}A_{m+r-4}\,.\,{}^nB_2 + {}^{m-n}A_{m+r-6}\,.\,{}^nB_3 + \cdots\cdots$$

wo die Reihe entweder bei ${}^nB_n$ oder auch, wenn $m+r$ gerade ist, bei ${}^{m-n}A$ oder wenn $m+r$ ungerade isi, bei ${}^{m-n}A_1$ abbricht. Hiernach wird

$$\left(\frac{P_m}{x}\right) \quad K_{m+r} = {}^mA_{m+r}\,.\; B$$

$$\left(\frac{P_{m-1}\,\beta}{x^2}\right) \quad K_{m+r} = {}^{m-1}A_{m+r}\,.\; {}^1B + {}^{m-1}A_{m+r-2}\,.\; {}^1B_1$$

. . . .

$$\left(\frac{P_1\,\beta^{m-1}}{x^m}\right) K_{m+r} = {}^1A_{m+r}\,.\,{}^{m-1}B + {}^1A_{m+r-2}\,.\,{}^{m-1}B_1 + {}^1A_{m+r-4}\,.\,{}^{m-1}B_2 + \cdots\cdots$$

$$\left(\frac{P\,\beta^m}{x^{m+1}}\right) K_{m+r} = A_{m+r}\,.\; {}^mB + A_{m+r-2}\,.\; {}^mB_1 + A_{m+r-4}\,.\; {}^mB_2 + A_{m+r-6}\,.\,{}^mB_3 + \cdots\cdots$$

daher wegen $(Q_m)\ K_r = {}^mG_r$ nach [I], wenn man zuvor statt B; ${}^1B$; ${}^1B_1$; ${}^2B$; ...... die entsprechenden Werthe setzt

$$
\text{(I)}\ {}^{m}G_r = \left\{
\begin{array}{l}
+ \quad {}^{m}A_{m+r} \\
-\left[b \ . \ {}^{m-1}A_{m+r} + c \ . \ {}^{m-1}A_{m+r-2}\right] \\
+\left[b^2 \ . \ {}^{m-2}A_{m+r} + 2bc \ . \ {}^{m-2}A_{m+r-2} + c^2 \ . \ {}^{m-2}A_{m+r-4}\right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-(-1)^m \left[b^{m-1} . {}^{1}A_{m+r} + (m-1) b^{m-2} c \ . \ {}^{1}A_{m+r-2} + (m-1)_2 \, b^{m-3} c^2 . {}^{1}A_{m+r-4} + \cdots\cdots\right] \\
+(-1)^m \left[b^m \ . \ A_{m+r} + m \ b^{m-1} c \ . \ A_{m+r-2} + m_2 \ b^{m-2} c^2 . \ A_{m+r-4} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \ m_3 \ b^{m-3} c^3 . \ A_{m+r-6} + \cdots\cdots\right]
\end{array}
\right\}
$$

Ferner findet man aus $P^1 = (x + by + cx^2y)\ Q^1$

$$P_m = x\,Q_m + (b + cx^2)\ Q_{m-1}, \text{ daher}$$

$$\text{(II)}\ \ {}^{m}A_{m+r-1} = {}^{m}G_{r-1} + b \ . \ {}^{m-1}G_r + c \ . \ {}^{m-1}G_{r-2}$$

und wenn man ${}^{m}A_{m+r-1} = f\,(m, r)$ setzt

$$
\text{(III)}\ {}^{m}G_r = \left\{
\begin{array}{l}
+ \quad f(m, r+1) \\
-\left[b \ f(m-1, r+2) + c f(m-1, r)\right] \\
+\left[b^2 f(m-2, r+3) + 2\,b\,c f\,(m-2, r+1) + c^2 f(m-2, r-1)\right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-(-1)^m \left[b^{m-1} \ f\,(1, m+r) + (m-1) \ b^{m-2} \ c\,f\,(1, m+r-2) \right. \\
\qquad\qquad \left. + \ (m-1)_2 \ b^{m-3} \ c^2 f\,(1, m+r-4) + \cdots\cdots\right] \\
+(-1)^m \left[b^m f\,(0, m+r+1) + m\,b^{m-1} \ c\,f\,(0, m+r-1) \right. \\
\qquad \left. + m_2\,b^{m-2}\,c^2 f(0, m+r-3) + m_3\,b^{m-3}\,c^3 f(0, m+r-5) + \cdots\cdots\right]
\end{array}
\right\}
$$

Beispiel. Die gegebene Gleichung ${}^{m}G_{r-1} + {}^{m-1}G_r + {}^{m-1}G_{r-2} = m\,.\,r$ zu integriren, wird hier $f\,(m, r) = m\,.\,r$ also $f\,(0, r) = 0$ u. s. w. daher findet man

$$
\begin{aligned}
{}^{m}G_r = (r+1) \big[m - 2\,(m-1) + 4\,(m-2) - 8\,(m-3) + 16\,(m-4) \\
- 32\,(m-5) + \cdots\cdots\cdots\big]
\end{aligned}
$$

also $G_r = 0$; ${}^{1}G_r = r + 1$; ${}^{2}G_r = 0$; ${}^{3}G_r = 3\,(r+1)$; ${}^{4}G_r = -2\,(r+1)$; ${}^{5}G_r = 9\,(r+1)$; ${}^{6}G_r = -12\,(r-1)$; u. s. w.

Für $m = 2$ und $m = 5$ findet man hiernach

$${}^{2}G_{r-1} + {}^{1}G_r + {}^{1}G_{r-2} = 2r \text{ und } {}^{5}G_{r-1} + {}^{4}G_r + {}^{4}G_{r-2} = 5r \text{ oder}$$

$$0 \quad + r + 1 + r - 1 = 2r \qquad 9r - 2r - 2 - 2r + 2 = 5r.$$

§. 18.

Aufgabe. Die partielle Differenzgleichung

$${}^{m}G_{r-1} + b \ . \ {}^{m-1}G_r + c \ . \ {}^{m-1}G_{r-2} = 0$$

zu integriren, wenn die Werthe ${}^{m}G$ und G_r gegeben sind oder willkührlich angenommen werden.

Auflösung. Nach (II) §. 17 ist

$$ {}^{m}A_{m+r-1} = {}^{m}G_{r-1} + b \;.\; {}^{m-1}G_r + c \;.\; {}^{m-1}G_{r-2}, \text{ also} $$

$$ A_{r-1} = G_{r-1};\; {}^{m}A_{m-1} = b \;.\; {}^{m-1}G;\; {}^{m}A_m = {}^{m}G + b \;.\; {}^{m-1}G_1;\; {}^{m}A_{m+1} = {}^{m}G_1 + b \;.\; {}^{m-1}G_2 + c \;.\; {}^{m-1}G; \text{ u. s. w.} $$

Setzt man nun ${}^{m}G_{r-1} + b \;.\; {}^{m-1}G_r + c \;.\; {}^{m-1}G_{r-2} = 0$, so wird

$$ {}^{m}A_{m+1} = 0;\; {}^{m}A_{m+2} = 0;\; {}^{m}A_{m+3} = 0; \text{ u. s. w.} $$

dagegen aber erhalten A_r; ${}^{m}A_{m-1}$ und ${}^{m}A_m$ bestimmte Werthe und man findet nach §. 17. (I) in der Voraussetzung, daſs nur diese Werthe beibehalten werden, alle übrige aber wegfallen

$$ {}^{m}G_r = \left\{ \begin{array}{l} + \; {}^{m}A_{m+r} \\ - \left[b \;.\; {}^{m-1}A_{m+r} + c \;.\; {}^{m-1}A_{m+r-2} \right] \\ + \left[b^2 \;.\; {}^{m-2}A_{m+r} + 2b\, c \;.\; {}^{m-2}A_{m+r-2} + c^2 \;.\; {}^{m-2}A_{m+r-4} \right] \\ - \left[b^3 \;.\; {}^{m-3}A_{m+r} + 3b^2 c \;.\; {}^{m-3}A_{m+r-2} + 3_2 b\, c^2 \;.\; {}^{m-3}A_{m+r-4} \right. \\ \qquad \left. + c^3 \;.\; {}^{m-3}A_{m+r-6} \right] \\ + \left[b^4 \;.\; {}^{m-4}A_{m+r} + 4b^3 c \;.\; {}^{m-4}A_{m+r-2} + 4_2 b^2 c^2 \;.\; {}^{m-4}A_{m+r-4} \right. \\ \qquad \left. + 4_3 bc^3 \;.\; {}^{m-4}A_{m+r-6} + c^4 \;.\; {}^{m-4}A_{m+r-8} \right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} $$

oder wegen $A_r = G_r$ und wenn man

$$ {}^{n}H_r = b^n \;.\; G_{r+n} + nb^{n-1} c \;.\; G_{r+n-2} + n_2 b^{n-2} c^2 \;.\; G_{r+n-4} + n_3 b^{n-3} c^3 \;.\; G_{r+n-6} + \ldots\ldots \text{ setzt} $$

$$ {}^{1}G_r = {}^{1}A_{r+1} - {}^{1}H_r $$

$$ {}^{2}G_r = {}^{2}A_{r+2} - c \;.\; {}^{1}A_r + {}^{2}H_r $$

$$ {}^{3}G_r = {}^{3}A_{r+3} - c \;.\; {}^{2}A_{r+1} + 2bc \;.\; {}^{1}A_{r+1} + c^2 \;.\; {}^{1}A_{r-1} - {}^{3}H_r $$

$$ {}^{4}G_r = {}^{4}A_{r+4} - c \;.\; {}^{3}A_{r+2} + 2bc \;.\; {}^{2}A_{r+2} + c^2 \;.\; {}^{2}A_r - 3bc^2 \;.\; {}^{1}A_r - c^3 \;.\; {}^{1}A_r + {}^{4}H_r $$

$$ {}^{5}G_r = {}^{5}A_{r+5} - c \;.\; {}^{4}A_{r+3} + 2bc \;.\; {}^{3}A_{r+3} + c^2 \;.\; {}^{3}A_{r+1} - 3bc^2 \;.\; {}^{2}A_{r+1} - c^3 \;.\; {}^{2}A_{r-1} + 6b^2 c^2 \;.\; {}^{1}A_{r+1} + 4bc^3 \;.\; {}^{1}A_{r-1} + c^4 \;.\; {}^{1}A_{r-3} - {}^{5}H_r $$

u. s. w.

Zur Bestimmung der Werthe ${}^{1}A_1$; ${}^{2}A_2$; ${}^{3}A_3$; ……………… entwickele man hieraus

$$^1G = {}^1A_1 - {}^1H$$
$$^2G = {}^2A_2 - c\,.\,{}^1A + {}^2H$$
$$^3G = {}^3A_3 - c\,.\,{}^2A_1 + 2bc\,.\,{}^1A_1 - {}^3H$$
$$^4G = {}^4A_4 - c\,.\,{}^3A_2 + 2bc\,.\,{}^2A_2 - 3bc^2\,.\,{}^1A + {}^4H$$
$$^5G = {}^5A_5 - c\,.\,{}^4A_3 + 2bc\,.\,{}^3A_3 - 3bc^2\,.\,{}^2A_1 + 6b^2c^2\,.\,{}^1A_1 - {}^5H.$$

u.s.w. so findet man wegen ${}^1A = bG$; ${}^2A_1 = b\,.\,{}^1G$; ${}^3A_2 = b\,.\,{}^2G$; ${}^4A_3 = b\,.\,{}^3G$; ....

und wenn man statt ${}^1H$; ${}^2H$; ${}^3H$; .... die entsprechenden Werthe setzt

$$^1A_1 = {}^1G + b\,.\,G_1$$
$$^2A_2 = {}^2G - b\,(b\,.\,G_2 + c\,.\,G)$$
$$^3A_3 = {}^3G - bc\,.\,{}^1G + b^2\,(bG_3 + c\,.\,G_1)$$
$$^4A_4 = {}^4G - bc\,.\,{}^2G - b^2\,(b^2\,.\,G_4 + 2bc\,.\,G_2 + c^2\,.\,G)$$
$$^5A_5 = {}^5G - bc\,.\,{}^3G - b^2c^2\,.\,{}^1G + b^3\,(b^2\,.\,G_5 + 3bc\,.\,G_3 + 2c^2\,.\,G_1)$$

u.s.w. folglich weil ${}^nG$ gegeben ist

$^1G_1 = -b\,.\,G_2 - c\,.\,G$	$^2G_1 = b^2\,.\,G_3 + bc\,.\,G_1 - c\,.\,{}^1G$
$^1G_2 = -b\,.\,G_3 - c\,.\,G_1$	$^2G_2 = b^2\,.\,G_4 + 2bc\,.\,G_2 + c^2\,.\,G$
$^1G_3 = -b\,.\,G_4 - c\,.\,G_2$	$^2G_3 = b^2\,.\,G_5 + 2bc\,.\,G_3 + c^2\,.\,G_1$
$^1G_4 = -b\,.\,G_5 - c\,.\,G_3$	$^2G_4 = b^2\,.\,G_6 + 2bc\,.\,G_4 + c^2\,.\,G_2$
....	....

$$^3G_1 = -b^3\,.\,G_4 - 2b^2c\,.\,G_2 - bc^2\,.\,G - c\,.\,{}^2G$$
$$^3G_2 = -b^3\,.\,G_5 - 3b^2c\,.\,G_3 - 2bc^2\,.\,G_1 + c^3\,.\,{}^1G$$
$$^3G_3 = -b^3\,.\,G_6 - 3b^2c\,.\,G_4 - 3bc^2\,.\,G_2 - c^3\,.\,G$$
$$^3G_3 = -b^3\,.\,G_7 - 3b^2c\,.\,G_5 - 3bc^2\,.\,G_3 - c^3\,.\,G_1$$
....

$$^4G_1 = b^4\,.\,G_5 + 3b^3c\,.\,G_3 + 2b^2c^2\,.\,G_1 - bc^2\,.\,{}^1G - c\,.\,G$$
$$^4G_2 = b^4\,.\,G_6 + 4b^3c\,.\,G_4 + 5b^2c^2\,.\,G_2 + 2bc^3\,.\,G + c^2\,.\,{}^2G$$
$$^4G_3 = b^4\,.\,G_7 + 4b^3c\,.\,G_5 + 6b^2c^2\,.\,G_3 + 3bc^3\,.\,G_1 - c^3\,.\,{}^1G$$
$$^4G_4 = b^4\,.\,G_8 + 4b^3c\,.\,G_6 + 6b^2c^2\,.\,G_4 + 4bc^2\,.\,G_2 + c^3\,.\,G$$
$$^4G_5 = b^4\,.\,G_9 + 4b^3c\,.\,G_7 + 6b^2c^2\,.\,G_6 + 4bc^3\,.\,G_3 + c^3\,.\,G_1$$
....

$$^5G_1 = -b^5\,.\,G_6 - 4b^4c\,.\,G_4 - 5b^3c^2\,.\,G_2 - 2b^2c^3\,.\,G - bc^2\,.\,{}^2G - c\,.\,{}^4G$$
$$^5G_2 = -b^5\,.\,G_7 - 5b^4c\,.\,G_5 - 9b^3c^2\,.\,G_3 - 5b^2c^3\,.\,G_1 + 2bc^3\,.\,{}^1G + c^2\,.\,{}^3G$$
$$^5G_3 = -b^5\,.\,G_8 - 5b^4c\,.\,G_6 - 10b^3c^2\,.\,G_4 - 9b^2c^3\,.\,G_2 - 3bc^4\,.\,G - c^3\,.\,{}^2G$$
$$^5G_4 = -b^5\,.\,G_9 - 5b^4c\,.\,G_7 - 10b^3c^2\,.\,G_5 - 10b^2c^3\,.\,G_3 - 4bc^4\,.\,G_1 + c^4\,.\,{}^1G$$
$$^5G_5 = -b^5\,.\,G_{10} - 6b^4c\,.\,G_8 - 10b^3c^2\,.\,G_6 - 10b^2c^3\,.\,G_4 - 5bc^4\,.\,G_2 - c^5\,.\,G$$
....

$${}^6G_1 = b^6.G_7 + 5b^5c.G_5 + 9b^4c^2.G_3 + 5b^3c^3.G_1 - 2b^2c^3.{}^1G - bc^2.{}^3G - c.{}^5G$$
$${}^6G_2 = b^6.G_8 + 6b^5c.G_6 + 14b^4c^2.G_4 + 14b^3c^3.G_2 - 5b^2c^4.G + 2bc^3.{}^2G + c^2.{}^4G$$
$${}^6G_3 = b^6.G_9 + 6b^5c.G_7 + 15b^4c^2.G_5 + 19b^3c^3.G_3 - 9b^2c^4.G_1 - 3bc^4.{}^1G - c^3.{}^3G$$
$${}^6G_4 = b^6.G_{10} + 6b^5c.G_8 + 15b^4c^2.G_6 + 20b^3c^3.G_4 - 14b^2c^4.G_2 + 4bc^5.G + c^4.{}^2G$$
$${}^6G_5 = b^6.G_{11} + 6b^5c.G_9 + 15b^4c^2.G_7 + 20b^3c^3.G_5 - 15b^2c^4.G_3 + 5bc^5.G_1 - c^5.{}^1G$$
$${}^6G_6 = b^6.G_{12} + 6b^5c.G_{10} + 15b^4c^2.G_8 + 20b^3c^3.G_6 - 15b^2c^4.G_4 + 6bc^5.G_2 + c^6.G$$

u. s. w.

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^mG_{r-1} + {}^{m-1}G_r + {}^{m-1}G_{r-2} = 0$ zu integriren, wenn ${}^mG = G_r = 1$ gegeben sind. Weil hier $b = c = 1$ ist, so entsteht für verschiedene Werthe von m und r nachstehende Tafel:

${}^mG_r$	0	1	2	3	4	5	6	7 ...... r
0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1 ....
1	+ 1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2 ....
2	+ 1	+ 1	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4 ....
3	+ 1	− 5	− 5	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8 ....
4	+ 1	+ 4	+ 13	+ 13	+ 16	+ 16	+ 16	+ 16 ....
5	+ 1	− 14	− 17	− 29	− 29	− 32	− 32	− 32 ....
6	+ 1	+ 16	+ 43	+ 46	+ 61	+ 61	+ 64	+ 64 ....
⋮	....	....	....	....	....	....	....	....
m								

Durch Sehnen in Kegelschnitten gleich groſse Segmente abzuschneiden, und isotomische oder äquisegmentarische Figuren von beliebiger Seitenzahl einzuschreiben.

Von

Hrn. GRUSON.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 28. April 1824.]

Als ich vor mehreren Jahren meine 1809 erschienene Geodäsie bearbeitete, veranlaſste mich die Aufgabe:

> In einem gegebenen Winkel durch eine gerade Linie einen Triangel von gegebenem Inhalt abzuschneiden,

den geometrischen Ort von den Mittelpunkten aller Linien zu bestimmen, die von einem gegebenen Winkel einen Triangel von gegebenem und immer gleichem Inhalte abschneiden.

Diese Untersuchung führte auf die verwandten Aufgaben:

> Den geometrischen Ort von der Mitte aller Sehnen zu bestimmen, die in den Kegelschnitten gleich groſse Segmente abschneiden.

Diese Untersuchungen wurden von mir anfänglich mittelst der höhern Analysis ausgeführt, aber die Einfachheit der erhaltenen Resultate lieſs mich ahnden, daſs elementarische Betrachtungen zum Ziele führen könnten, wodurch dieser Gegenstand für mich um so mehr an Interesse gewonnen hat, so daſs ich nicht anstehe, diese äuſserst einfachen und

leichten Auflösungen einer auf den ersten Anblick, selbst durch die höhere Analysis für Anfänger schwierig scheinenden Aufgabe, hier mitzutheilen.

I. Aufg. Den geometrischen Ort von der Mitte aller zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels gezogenen Linien zu finden, wodurch dem Winkel immer gleich grofse Triangel von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden.

Aufl. 1. Der gegebene Winkel sei 2α, der Inhalt des abzuschneidenden Triangels gleich F; bezeichnet man die abgeschnittenen Schenkel dieses Triangels mit $2x$ und $2y$, so hat man

$$\frac{2x.2y}{2}.\sin 2\alpha = F;$$

hieraus $x.y.\sin 2\alpha = \frac{1}{2}F$.

Diese Formel drückt den constanten Inhalt eines Parallelogramms aus, dessen Seiten x, y, und 2α der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ist.

2. Diese Gleichung wird sogleich als eine Gleichung zwischen den Assymptoten einer Hyperbel erkannt, deren Assymptotenwinkel 2α, x und y die Coordinaten sind.

3. $xy = \frac{F}{2\sin 2\alpha}$ ist bekanntlich gleich der Potenz der Hyperbel $= \frac{a^2+b^2}{4}$, wenn $2a$ und $2b$ die Quer- und conjugirten Axen bezeichnen.

4. Zur Bestimmung dieser Axen dienen die Gleichungen

$$a^2 + b^2 = \frac{2F}{\sin 2\alpha} \text{ und } 2a.b = 2F,$$

woraus

$$a + b = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + 1\right) 2F} \text{ und } a - b = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - 1\right) 2F};$$

folglich $a = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+1\right)2F} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-1\right)2F}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2F}{\sin 2\alpha}}.\left[\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \sqrt{1-\sin 2\alpha}\right] = \sqrt{\frac{F}{2\sin 2\alpha}}.\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{F.\cot\alpha}$$

$$\text{und } b = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+1\right)2F} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-1\right)2F}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2F}{\sin 2\alpha}}\left[\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{F.\operatorname{tg}\alpha}.$$

5. Durch eine reine, geometrisch abgeleitete Construction ergeben sich die Axen, wenn man von dem Winkel 2α einen gleichschenkligen Triangel $\frac{4x^2}{2}\,.\sin 2\alpha = F$ abschneidet. Auch würden sich hier die Werthe von a und b leichter als in (4) finden, weil $b = x\sin\alpha$ und $a = x\cos\alpha$ ist.
6. Zeichnet man die dazu gehörige Hyperbel, so ergiebt sich sogleich, dafs alle Linien, welche von dem gegebenen Winkel gleich, grofse Triangel abschneiden sollen, Tangenten von der gezeichneten Hyperbel werden, und da bekanntlich alle zwischen den Assymptoten liegende Tangenten von der Hyperbel im Berührungspunkte halbirt werden, so folgt: dafs der gesuchte geometrische Ort eine Hyperbel ist, deren Assymptoten Winkel 2α und deren Axen $2a$, $2b$, wir in (4) bestimmt haben.
7. Ist x die Absisse für den Berührungspunkt, so ergeben sich, wenn man aus den Endpunkten der Tangente Perpendikel auf die Queraxe und deren Verlängerung fallen läfst, durch die dadurch entstehenden ähnlichen Triangel, die drei Seiten A, B, C des in Rede stehenden Triangels, nemlich:

die Länge der Seite, welche die Tangente bildet,

$$A = \frac{2}{a}\sqrt{(a^2+b^2)\,x^2 - a^4}\,,$$

die Seite $B = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$

und die Seite $C = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right).$

Da nun bekanntlich

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{\left[(B+C)^2 - A^2\right]\left[A^2-(C-B)^2\right]},$$

so ergiebt sich $(B+C)^2=\left[\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right]^2=\frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2),$

$$A^2 = \frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2)-4a^4$$

Also $(B+C)^2-A^2=4a^2.$

Eben so $(C-B)^2$

$$=\left[-\frac{2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]^2=\frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2)-4a^2-4b^2,$$

also $A^2-(C-B)^2=4b^2,$

Folglich $F=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2.4b^2}=ab,$ welches mit (4) stimmt.

8. Ist in einem geraden Kegel der Scheitelwinkel des Axentriangels $=2\alpha$, und man schneidet diesen Kegel parallel mit dem Axentriangel in der Entfernung b, so erhält man die Hyperbel, deren Queraxe $=2a$ und deren conjugirte Axe $=2b$, und denkt man die Ebene dieser Hyperbel projicirt auf die Ebene des parallelen Axentriangels, so leuchtet es sogleich ein, dafs die Seiten dieses Axentriangels die Assymptoten gedachter Hyperbel sind.
9. Denkt man sich einen solchen hohlen Kegel, und giefst irgend eine bestimmte Quantität Flüssiges hinein, so werden die elliptischen, horizontalen Wasserspiegel die tangentirenden Ebenen von solchen Hyperbeln, also auch von der Hyperboloïde, die durch eine solche Hyperbel erzeugt wird, deren halbe Queraxe in der verticalen Stellung des Kegels die Entfernung der Kegelspitze vom Wasserspiegel, und deren conjugirte Axe gleich dem Durchmesser des Wasserspiegels ist.

II. Aufg. Den geometrischen Ort von der Mitte aller Sehnen zu bestimmen, die in den Kegelschnitten isotomische Segmente abschneiden.

Aufl. 1. Wie die höhere Analysis dergleichen Aufgaben auflöst, will ich hier übergehen, und erlaube mir, deshalb auf Brandes treffliches Lehrbuch der höhern Geometrie 2r Theil §. 239-242. zu verweisen. Ich werde hier nur die ungemein einfache, elementare Auflösung davon geben.

2. Bekanntlich kann jeder Kegelschnitt als irgend eine Projection des Kreises betrachtet werden, und umgekehrt der Kreis als irgend eine Projection eines beliebigen Kegelschnitts. — Hier soll nur von orthographischer Projection, als die leichteste die Rede sein, und um die Sache in der Vorstellung zu erleichtern, wollen wir unter den Kegelschnitten die Ellipse wählen.
3. Will man in einer Ellipse durch eine Sehne ein Segment von gegebenem Flächeninhalte, oder ein Segment abschneiden, welches zu der Fläche der ganzen Ellipse ein gegebenes Verhältnifs hat, so würde es blos darauf ankommen, in dem über der kleinen Axe beschriebenen Kreise ein Kreissegment abzuschneiden, welches zu dem ganzen Kreise in dem gegebenen Verhältnisse stehet. — Sieht man nun die Ellipse als die Projection dieses Kreises an, so ziehe man nur durch die Endpunkte der Kreissehne Parallelen mit der grofsen Axe, und verbinde die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Ellipse durch eine Ellipsensehne, so hat man der Projectionslehre gemäfs ein Ellipsensegment, welches zu seiner Ellipse dasselbe Verhältnifs hat, wie das Kreissegment zu seinem Kreise.
4. Soll man in einer Ellipse z.B. ein Sechsseit einschreiben, dessen Segmente isotomisch sind, so beschreibe man in dem Kreis über der kleinen Axe ein reguläres Sechsseit, ziehe wie (3) durch alle Winkelspitzen Parallelen mit der grofsen Axe, und verbinde die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Ellipse durch gerade Linien, so ist die Aufgabe gelöst; weil nach (3) jedes entstandene Ellipsensegment zur ganzen Ellipse immer dasselbe Verhältnifs, wie das zugehörige Kreissegment zum ganzen Kreise haben mufs, und da im Kreise die Segmente alle gleich sind, so sind es auch die in der Ellipse.
5. Denkt man sich nun einen Berührungskreis in dem im Kreise (4) eingeschriebenen, regulären Sechsseit, so ist dessen Projection offenbar eine der erstern ähnliche Ellipse, die jede Ellipsensehne des isotomischen Sechsseits in ihrer Mitte berührt.

6. Der gesuchte geometrische Ort von der Mitte aller Ellipsensehnen, die zu isotomischen Segmenten gehören, ist also eine der äufsern Ellipse ähnliche und concentrische Ellipse, d. h. deren Axen in beiden Ellipsen einerlei Verhältnifs zu einander haben.
7. Die allgemeine Eigenschaft der ähnlichen, concentrischen Ellipsen ist also einzig die, dafs alle Tangenten der innern Ellipse in der äufsern Ellipse isotomische Ellipsensegmente abschneiden. Aber so wenig jeder innere concentrische Kreis geeignet ist, durch seine Tangenten den äufsern Kreis in gleiche Theile zu theilen, eben so wenig ist dazu jede innere concentrische, ähnliche Ellipse geeignet, die Peripherie der äufsern Ellipse genau so zu theilen, dafs eine ganze Anzahl getrennter isotomischer Ellipsensegmente entstehen.
8. Bei den ähnlichen concentrischen Hyperbeln lassen sich dieselben Schlüsse, wie oben bei der Ellipse machen. Es ist nur noch zu bemerken, dafs bei den Hyperbeln diejenige, welche die gröfsern Axen hat, die innere wird, und ihre Convexität der Concavität der äufsern Hyperbel zukehrt. Uebrigens wird man gleichfalls sehen, dafs, da jede Tangente der innern Hyperbel zugleich eine doppelte Ordinate zu einem Durchmesser der äufsern Hyperbel ist, sie nothwendig in dem Berührungspunkt halbirt ist.
9. Da eine Parabel als eine Ellipse angesehen werden darf, deren grofse Axe, und folglich auch ihre Hälfte, oder die Entfernung des Scheitelpunkts vom Mittelpunkt unendlich ist, so folgt hieraus, dafs in der Parabel die Diameter zur Axe parallel werden. Nun mufs, wie in Betreff der Ellipse, der Diameter die Tangente der innern Kurve halbiren, und folglich diese Tangente parallel zu der Tangente der äufsern Parabel, oder, welches einerlei ist, die correspondirenden Bogen ähnlich sein, und also auch die Abscissen und die Ordinaten von diesen zwei Bogen sich wie die Parameter dieser zwei Parabeln verhalten. Da aber wegen der Parallelität der Dia-

meter mit der Axe die zwei zu den Berührungspunkten gehörigen Ordinaten gleich sind, und also die beiden Parameter auch gleich sein müssen, oder beide Parabel sind nicht wie alle Parabeln, blos ähnlich, sondern völlig einander gleich, so liegt der Scheitel auf der Axe da, wo eine auf die Axe perpendikuläre Sehne von der gegebenen Parabel eine Fläche von verlangter Gröfse abschneidet.

10. Ist ein hohler Cylinder, dessen parallele und congruente Grundflächen Ellipsen sind, mit einer bestimmten Quantität Flüssigkeit gefüllt, so schneidet jede in eine Lage, wo die Grundflächen vertikal stehen, isotomische Körpersegmente ab, deren Wasserspiegel immer von concentrischen, den Grundflächen ähnlichen Ellipsen berührt werden.

Verbesserungen.

Seite 18. Formel [19]. Auch die von i unabhängigen Theile der Coefficienten von Sin $(f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$ und Sin $(f\mu + k\mu' + \omega + \omega')$ sind respective in Cos $\frac{1}{2} I^2$ und Sin $\frac{1}{2} I^2$ zu multipliciren.

Seite 26. Formel [34]. Zeile 3 ist statt Sin $(2\mu' + \omega')\, 2e' \left\{ \frac{1}{2\nu + 1} - \frac{1}{2\nu + 1} \right\}$

zu lesen......... Sin $(2\mu' + \omega')\, 2e' \left\{ \frac{1}{2\nu + 1} - \frac{1}{2\nu - 1} \right\}$



